1. Przestrzenie funkcji: otwartość.

Będziemy się poruszać wyłącznie po rozmaitościach różniczkowych, czyli klasy co najmniej $\mathcal{C}^1$. Zakładamy parazwartość, ośrodkowość, drugi aksjomat przeliczalności, normalność, żeby nie wdawać się w niepotrzebne dyskusje.

Zadania. *Przypomnieć sobie, jak dowodzi się istnienia rozkładów jedności na przestrzeniach parazwartych, jak konstruuje się gładkie rozkłady jedności w $\mathbb{R}^n$ i na rozmaitościach (najlepiej przez splot). Przypomnieć sobie, jak używa się rozkładów jedności do konstrukcji metryki (Riemanna) na rozmaitościach. Skonstruować zanurzenie (klasy takiej, jak rozważana rozmaitość) rozmaitości w przestrzeń euklidesową, tak, żeby działało w przypadku różniczkowym i "tylko" ciągłym. Znaleźć jedno z najelegantszych zastosowań twierdzenia Sarda: wymiar przestrzeni można obniżyć do dwukrotności wymiaru rozmaitości plus jeden.*
Dla zainteresowanych: porównać powyższe z tzw. lematem Michaela.

W przestrzeni odwzorowań ciągłych $\mathcal{C}^0(X, Y)$ wprowadzamy topologię zwarto-otwartą: generowaną przez podbazę

$$W(K, U) := \{f : X \to Y | f(K) \subset U\}$$

Zadania. *Pokazać, że jest to, dla lokalnie zwartych X i metrycznych Y topologia zbieżności niemal jednostajnej. Stąd: aksjomaty przeliczalności, aksjomaty oddzielania, itd.*
Pokazać, że zbiór homeomorfizmów nie jest otwarty w tej topologii. Pokazać, że każdy homeomorfizm ma otoczenie złożone z suriekcji.

Szukamy naturalnej topologii, w której otwarte okażą się zbiory dyfeomorfizmów, zanurzeń, submersji, immersji i inne przydatne zbiory.

Zadania. *Odrzucić pokusę zaproponowania topologii dyskretnej.*

Zbiór odwzorowań klasy $\mathcal{C}^r$ wyposażymy w słabą topologię Whitneya, generowaną przez podbazę otoczeń:

$$\mathcal{N}(f, K, (V, \phi), (U, \psi), \epsilon) := \{g : M \to N | g(K) \subset V; \|D^k(\psi g \phi^{-1}) - D^k(\psi f \phi^{-1})\| < \epsilon, k = 0, \ldots, r\}$$

czyli te funkcje, które są niedaleko f wraz ze wszystkimi swoimi pochodnymi do rzędu r włącznie (norma oznacza supremum po wszystkich punktach ze zbioru zwartego z normy operatora wieloliniowego). Oznaczamy ją $\mathcal{C}^r_S(M, N)$.

Zadania. *Doczytać (Hirsch) o topologii silnej. Będziemy się posługiwać topologią słabą, bo na rozmaitościach zwartych nie ma różnicy, a tylko takie będą nam potrzebne. Dla zainteresowanych: zrozumieć różnicę pomiędzy obiema topologiami (aksjomaty oddzielania, przeliczalności, itd.).*
Zastanowić się nad topologicznymi własnościami naturalnych inkluzji $\mathcal{C}^r_S(M, N) \hookrightarrow \mathcal{C}^{r-k}_S(M, N)$.

Odtąd będziemy myśleć tylko o rozmaitościach zwartych.

Zadania. *Pokazać, że zbiory immersji i submersji są otwarte w topologii słabej. Hint: raz w życiu uświadomić sobie topologiczną strukturę grupy $Gl(n)$ i innych grup macierzy. Pokazać otwartość zbioru zanurzeń i odwzorowań właściwych (proper maps).*

2. Przestrzenie funkcji: aproksymacja.

Zadania. *Pokazać, że odwzorowania klasy $\mathcal{C}^r$ są gęste w $\mathcal{C}^0(M,N)$. Dla zuchwałych konserwatystów: wykorzystać wzór Taylora.*

Powyższy problem nie jest trudny, bo nie musimy brać pod uwagę pochodnych. Trudniej pokazać gęstość odwzorowań klasy $\mathcal{C}^r$ w $\mathcal{C}^{r-k}_S(M,N)$.

Zadania. *Pokazać, że każde odwzorowanie klasy $f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}$ klasy $\mathcal{C}^r$ daje się - w topologii słabej - przybliżać odwzorowaniami gładkimi (klasy $\mathcal{C}^\infty$). Polecam sploty lub - znowu - wzór Taylora. Zglobalizować ten wynik na odwzorowania między rozmaitościami. Można poprowadzić dowód tak, by uwypuklić teorię wymiaru.*
Z twierdzeń o otwartości wyciągnąć wniosek o aproksymacji immersji immersjami, dyfeomorfizmów dyfeomorfizmami, itd.

Możemy więc zapomnieć o używaniu jakichkolwiek odwzorowań poza gładkimi.

Zadania. *Zauważyć, że obniżanie wymiaru w twierdzeniu o zanurzaniu sprowadza się do twierdzenia, że zanurzenia są gęste w $\mathcal{C}^r_S(M,N)$, o ile tylko wymiary rozmaitości są odpowiednie. Zaaplikować taką samą technologię do pokazania gęstości submersji, do gęstości zanurzeń w odwzorowaniach właściwych.*
Warto zapoznać się z "funktorialną" technologią twierdzenia globalizacyjnego w Hirschu, gdzie trochę inaczej pojawiają się ograniczenia na wymiar; jednak - najpierw wyniki, potem inne techniki.

3. Klasy różniczkowalności rozmaitości.

Okazuje się, że każda rozmaitość klasy $\mathcal{C}^r$ jest $\mathcal{C}^r$-dyfeomorficzna z pewną (jedyną) rozmaitością klasy $\mathcal{C}^\infty$.

Zadania. *Zapoznać się z jakimś dowodem/uzasadnieniem tego faktu. Zastanowić się nad następującym dowodem:*

rozmaitość klasy $\mathcal{C}^r$ jest zdefiniowana przez rodzinę zbiorów otwartych w $\mathbb{R}^n$ i dyfeomorfizmów klasy $\mathcal{C}^r$ między pewnymi ich podzbiorami (odwzorowań przejścia, które topologicznie kleją rozmaitość ze zbiorów otwartych); każdy z tych dyfeomorfizmów daje się przybliżyć odwzorowaniem gładkim, odpowiedni dobór takich aproksymacji da nam mapy przejścia na rozmaitości gładkiej, $\mathcal{C}^r$-dyfeomorficznej z wyjściową.

Od teraz możemy więc również zapomnieć o klasie różniczkowalności i traktować wszystkie rozmaitości jako gładkie.

4. Homotopijne własności rozmaitości.

Zadania. *Pokazać, że w każdej klasie homotopii $[M,N]$ jest odwzorowanie gładkie. Policzyć wszystkie grupy homotopii $\mathbb{S}^n$ do wymiaru $n-1$, pokazując, że każde odwzorowanie z niższej sfery jest homotopijne z odwzorowaniem niesurjektywnym. Hint: twierdzenie Sarda. Spróbować pokazać to, nie wykorzystując powyższej "homotopijnej gładkiej aproksymacji". Dać spokój po pierwszej godzinie. Hint: przestrzenie zwarte są zupełne.*

Najważniejszym narzędziem "homotopijnym" na rozmaitościach jest teoria Morse'a. Na każdej rozmaitości M istnieje m, funkcja Morse'a, czyli taka, której zbiór punktów krytycznych jest skończony (pamiętajmy o zwartości), a każdy z tych

punktów jest niezdegenerowany, czyli macierz Hessego w tym punkcie jest nieosobliwa. Lemat Morse'a mówi, jak lokalnie wygląda funkcja Morse'a w otoczeniu punktu kryrycznego, nas interesuje lemat deformacyjny:

Jeśli M_a oznacza $m^{-1}((-\infty, a])$ to M_a jest homotopijnie równoważne (nawet dyfeomorficzne, ale to bez znaczenia) M_b, o ile w przedziale $[a, b]$ nie ma wartości krytycznych, ponadto $M_b \cong M_c \cong M_a \cup D_p$, gdzie p jest indeksem jedynego punktu krytycznego o wartości c w przedziale $[a, b]$ i suma oznacza doklejenie komórki tego wymiaru.

Zadania. *Do wszystkich triangulacji rozmaitości używanych we wcześniejszych obliczeniach dorobić funkcję Morse'a, która będzie po kolei dołączać sympleksy tej triangulacji.*

Doklejanie komórek nie jest tak proste, jak dołączanie sympleksów w kompleksach symplicjalnych. Potrzebujemy definicji CW-kompleksu.

CW-kompleksem nazywamy przestrzeń posiadającą rozkład komórkowy, czyli $K = \bigcup K_i$, gdzie K_0 jest dyskretnym zbiorem punktów, a K_{i+1} powstaje z K_i przez doklejenie pewnej ilości i-komórek $\mathbb{D}_i$ przez odwzorowanie ciągłe z brzegu $\mathbb{D}_i$ w K_i. Taka definicja wystarczy dla skończonych, lokalnie skończonych i skończonego typu CW-kompleksów, z którymi będziemy się spotykać.

Zadania. *Odszukać definicję CW-kompleksu pochodzącą od Whiteheada i raz na zawsze zapamiętać, skąd bierze się ten nieszczęsny skrót. Opisać zbiory otwarte w CW-kompleksach.*

Znaleźć CW-rozkłady powierzchni i różne rozkłady sfer. Zauważyć, że są na ogół prostsze niż triangulacje.

Uogólnić na CW-kompleksy metodę liczenia homologii znaną z triangulacji. Dla uproszczenia używać takich rozkładów, w których komórki wklejane są homeomorfizmami (nazywane są CW-kompleksami regularnymi).

Pobawmy się trochę CW-kompleksami.

Zadania. *CW-kompleksy tworzą kategorię, z odwzorowaniami ciągłymi. Jeśli dopuścić tylko odwzorowania komórkowe (i-szkielet przechodzi w i-szkielet), to jest ona zamknięta na przeciwobrazy. Jest zamknięta na bukiety, sumy rozłączne, zawieszenia. Jest zamknięta na produkty, ale nie zawsze topologia CW-kompleksu zgadza się z topologią Tichonowa (przykład wymaga definicji Whiteheada). Jest zamknięta na dzielenie przez podkompleksy. Przemyśleć smashowanie CW-kompleksów.*

Każde odwzorowanie ciągłe pomiędzy CW-kompleksami jest homotopijne z odwzorowaniem komórkowym.

Teoria Morse'a daje nam CW-rozkład każdej rozmaitości. Zastanowić się, czy da się (prosto) skonstruować taki rozkład bez uciekania się do niej. Zastanowić się, czy każdy CW-kompleks (albo przynajmniej rozmaitość) jest homeomorficzny (przez odwzorowanie komórkowe) albo przynajmniej homotopijnie równoważny CW-kompleksowi regularnemu.

Pokazać, że każdy (spójny) CW-kompleks ma rozkład z jedną tylko 0-komórką.

Odtąd będziemy zajmować się homologiami o wartościach w ciele $\mathbb{R}$.

Zadania. *Przeprowadzić następujący dowód dualności Poincaré:*

mając funkcję Morse'a na M znaleźć taką funkcję Morse'a, by zadać bijekcję między komórkami w i-szkielecie a komórkami w $n-i$ szkielecie (n to wymiar rozmaitości); wyciągnąć wniosek o izomorficzności i-tych i $n-i$-tych homologii; ponieważ $\mathbb{R}$ jest ciałem, $Hom(C_*(M), \mathbb{R})$ jest (niekanonicznie, ale o to mniejsza) izomorficzny (w kategorii przestrzeni wektorowych) z $C_*(M)$; wyciągnąć wniosek o tym, że przestrzeń dualna do i-tych homologii to i-te kohomologie; poskładać wszystkie otrzymane izomorfizmy.

Zdecydować, co w powyższym rozumowaniu w ogóle daje się uratować, a co jest kompletnie bez sensu.

5. Formy różniczkowe.

Formy różniczkowe potraktujemy z większym sensem później, na razie ograniczymy się do następującej konstrukcji.

0-formami nazwiemy wszystkie funkcje gładkie na rozmaitości.

1-formami nazwiemy odwzorowania liniowe (nad pierścieniem funkcji gładkich) z modułu (gładkich) pól wektorowych w pierścień funkcji gładkich.

Ze względu na trzykrotne użycie słowa "gładki" w poprzednim zdaniu, odtąd wszystkie obiekty są gładkie.

1-formy oznaczamy przez $\Omega^1(M)$.

Zadania. *Zauważyć, że ze względu na rozkłady jedności (lub lemat Urysona) 1-forma jest określona lokalnie. Zauważyć, że to daje izomorfizm przestrzeni 1-form do przestrzeni pól wektorowych.*

k-formą na nazywamy antysymetryczne, k-liniowe odwzorowanie z modułu pól wektorowych w pierścień funkcji. Oznaczamy tę przestrzeń przez $\Omega^k(M)$.
Określimy iloczyn zewnętrzny, z tą samą gradacją co cup-product w kołańcuchach: jeśli ω jest i-formą, a γ - j-formą, to

$$\omega \wedge \gamma(X_1, \ldots, X_{i+j}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{i+j}} sgn\sigma\omega(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(i)})\gamma(X_{\sigma(i+1)}, \ldots, X_{\sigma(j)})$$

gdzie $sgn\sigma$ oznacza znak permutacji.

Zadania. *Zauważyć, że każda k-forma ω lokalnie daje się przedstawić jako suma*

$$\omega = \sum_{i=(i_1,\ldots,i_k)} \omega_i dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

gdzie dx_j są dualne dualne do kanonicznego repera skojarzonego z mapą.

Ponieważ lubimy kompleksy (ko)łańcuchowe, potrzebujemy liniowego (nad $\mathbb{R}$, a nie nad funkcjami) operatora kobrzegu - nazywamy go różniczką zewnętrzną. Różniczka k-formy ma być $k+1$-formą, wystarczy określić ją lokalnie:

$$d\omega = d(\sum_{i=(i_1,\ldots,i_k)} \omega_i dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) = \sum_{i=(i_1,\ldots,i_k)} d(\omega_i dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k})$$

i tylko na elementach jednorodnych:

$$d(\omega_i dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) := \sum_{j=1,\ldots,n} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

Zadania. *Zauważyć, że taka lokalna definicja zależy od wyboru mapy i niekoniecznie daje formę określoną globalnie. Uwierzyć, że mimo to od mapy nie zależy i daje globalną formę. Raz w życiu sprawdzić, że* $d^2 = 0$. *Zatem możemy zdefiniować kohomologie, kohomologie de Rhama.*

Policzyć z definicji kohomologie de Rhama powierzchni.

Uwierzyć w twierdzenie de Rhama: kohomologie de Rhama są izomorficzne z kohomologiami singularnymi. Hint: przyswoić sobie twierdzenie Stokesa: dla każdej $n-1$*-formy* ω

$$\int_{\partial U} \omega = \int_U d\omega$$

zaczerpnąwszy skądś wiedzę, co oznaczają te straszne całki.

Sprawdzić, że wynik mnożenia zewnętrznego jest formą. Znaleźć wzory dotyczące związków różniczki zewnętrznej z iloczynem zewnętrznym. Zaindukować iloczyn na kohomologie. Uwierzyć, że cup-product i iloczyn zewnętrzny to te same iloczyny.

6. Izotopie.

Zadania. *Policzyć grupę podstawową dopełnienia okręgu zanurzonego w* $\mathbb{R}^3$ *w zwykły sposób i trójlistnika:*

Można potraktować oba jako zanurzone w sferę trójwymiarową. Przy okazji zauważyć, jak wielką krzywdę może wyrządzić grupie podstawowej przestrzeni uzwarcenie tej przestrzeni, zwłaszcza, jeśli rozważamy przestrzenie z dokładnością do homotopijnej równoważności.
Zastanowić się, dlaczego wynik obliczeń jest zaskakujący.

Dwie dyfeomorficzne podrozmaitości M, N_1 i N_2 nazywamy izotopijnymi, jeśli jest homotopia pomiędzy ich inkluzjami $i_1, i_2 : N \hookrightarrow M$: $i_1 \simeq_h i_2$ taka, że na każdym poziomie h_t jest zanurzeniem.

Zadania. *Przekonać się, że każda izotopia pomiędzy zwartymi podrozmaitościami jest dyfeotopią, daje się zrealizować przez dyfeomorfizm M homotopijny z identycznością (znów przez dyfeomorfizmy): istnieje $F \simeq_h id_M : i_2 = h_1 \circ i_1$ i h_t jest dyfeo.*

W szczególności, dwie izotopijne podrozmaitości mają dyfeomorficzne dopełnienia.