1. Wiązki wektorowe.

Trudno o twierdzenie charakteryzujące klasę rozmaitości różniczkowych, które nie opiera się o twierdzenie o rzędzie (lub któreś równoważne). Przeprowadzimy następującą konstrukcję:

Zadania. *Podrozmaitość gładka przyjmuje "jednoczesną parametryzację": dla każdego $x \in M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ istnieje takie otoczenie $U_x \subset \mathbb{R}^{n+m}$ i dyfeomorfizm $h : U_x \to I^{n+m}$ taki, że $M \cap U_x = h^{-1}(I^n \times \{0\} \times \ldots \times \{0\})$.*

Wykorzystać pewien rozkład jedności, by skonstruować zbiór otwarty $U \supset M$ i gładką retrakcję $r : U \to M$. Zastanowić się, jak porządne mogą być włókna $r^{-1}(x)$.

Przypomnieć sobie, jak konstruuje się przestrzeń styczną do rozmaitości i jak definiuje się pola wektorowe. Wcześniej korzystaliśmy z tego, że lokalnie każde pole daje się przedstawić jako kombinacja liniowa (o współczynnikach funkcyjnych) wektorów z repera skojarzonego z mapą. Zauważyć, że jeśli pola wektorowe to pewne odwzorowania $X : M \to \coprod_{x \in M} T_x M$, to powyższa uwaga pozwala wyposażyć tę sumę rozłączną w topologię, mianowicie nad każdym otoczeniem mapowym U, $\coprod_{x \in U} T_x M \sim U \times \mathbb{R}^n$. Zauważyć, że odwzorowania przejścia rozmaitości indukują gładkie dyfeomorfizmy $U \cap V \times \mathbb{R}^n \to U \cap V \times \mathbb{R}^n$, które zachowują włókna. Gratulacje, właśnie określiliśmy pierwszą w tych notatkach wiązkę lokalnie trywialną.

Wiązką nazywamy czwórkę (F, E, p, B), taką, że dla każdego punktu $b \in B$ istnieje otoczenie U_b takie, że $p^{-1}(U) \sim U \times F$; jeśli ponadto baza i włókno są rozmaitościami gładkimi i następujący diagram daje się domknąć gładkim włóknistym odwzorowaniem przejścia

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(U \cap V) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
U \cap V \times F \arrow[r, dotted] & U \cap V \times F
\end{tikzcd}$$

to wiązkę nazywamy gładką. Wiązkę, której włóknem jest przestrzeń wektorowa, a odwzorowania przejścia są (nad każdym punktem) liniowe, nazywamy wiązką wektorową.

Zadania. *Dla wiązek wektorowych podefiniować sumę prostą wiązek, iloraz wiązek i wszystkie możliwe konstrukcje z algebry liniowej. Skonstruować iloczyn skalarny na dowolnej wiązce tak, jak w wiązce stycznej. Pokazać, że wiązka wektorowa jest trywialna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje na niej tyle liniowo niezależnych sekcji, ile wynosi rząd wiązki (czyli moduł sekcji nad funkcjami jest wolny).*

Włożyć nieco pracy w zdefiniowanie cofania wiązek przez odwzorowania z rozmaitości w bazę wiązki.

Przekonać się - o tym na pewno przekonamy się na zajęciach - że wiązka jest zdefiniowana przez odwzorowania z bazy w grupę dyfeomorfizmów włókna.

Przyswoić sobie pojęcia grupy strukturalnej i redukcji wiązki, a także wiązki włóknistej głównej. Przemyśleć istnienie metryki w wiązce jako konsekwencję istnienia pewnej redukcji. Zauważyć, że jest to pochodna ściągalności $Gl(n)$ do $O(n)$ (retrakcja zadana jest przez konstrukcję Grama-Schmidta).

Powyższe mają sugerować, że teoria wiązek ma wiele wspólnego z teorią homotopii. Zajmiemy się tym w przyszłości.

Zadania. *Tymczasem skonstruujmy raz jeszcze otoczenie podrozmaitości z pierwszego ćwiczenia. Wiązka styczna do podrozmaitości zanurza się w wiązkę styczną do rozmaitości, wyposażonej w (jakąś) metrykę. Tam określamy jej dopełnienie ortogonalne (wiązkę normalną). Zauważyć, że da się gładko wybrać kule o środku w zerze w każdym włóknie tej wiązki tak, by odwzorowanie exp zastosowane do wybranych wektorów dało w obrazie szukane otoczenie. Dopracować szczegóły.*

Otoczenie podrozmaitości izomorficzne z wiązką normalną tej podrozmaitości nazywamy otoczeniem tubularnym.

Zaadaptować którąś z konstrukcji do brzegu rozmaitości; takie otoczenie będziemy nazywać kołnierzem.

Pokazać, że kołnierz brzegu jest, jako wiązka, trywialny.

2. Chirurgie.

Żeby umieć kleić rozmaitości gładkie, musimy sumę wyposażyć w strukturę różniczkową.

Zadania. *Zauważyć problem: dwie rozmaitości możemy skleić brzegiem i otrzymamy rozmaitość topologiczną, jednak klejenie może nie być gładkie. Podać przykład takiego klejenia.*

Zastosować następującą technikę: jeśli kleimy M i N wspólnym brzegiem B, to na $M \cup_B N$ mamy już strukturę różniczkową poza B; natomiast B ma z obu stron kołnierze, z których jednego nie należy ruszać, zaś drugi przesunąć dyfeotopią tak, by razem dawały otoczenie dyfeomorficzne z $B \times \mathbb{R}$; ponieważ używaliśmy dyfeotopii, wszystkie struktury pasują do siebie, dając atlas na $M \cup_B N$.

Zastanowić się, jak działa ta procedura na konkretnych przykładach, zastanowić się nad innymi możliwościami.

Zauważyć, że daje to dobrze określoną operację w kategorii rozmaitości, w szczególności otrzymana struktura różniczkowa na sumie nie zależy od wyborów czynionych po drodze.

Mamy teraz dużo narzędzi. Wykorzystajmy je!

Zadania. *Określić sumę spójną dwóch rozmaitości: $M \sharp N := M \setminus \mathbb{D}_n \cup_{\mathbb{S}^{n-1}} N \setminus \mathbb{D}_n$. Napisać w tm języku charakteryzację rozmaitości dwuwymiarowych.*

Podać wszystkie powierzchnie, które są brzegami trójwymiarowych rozmaitości. Problem natury filozoficznej: jak już się pokaże, że butelka Kleina jest brzegiem, to spróbować zastosować tę samą metodę do torusa o genusie 2.

Przestrzenie soczewkowe. Pokazać, że sfera trójwymiarowa daje się przedstawić jako suma dwóch pełnych torusów genusu 2 sklejonych brzegiem. Uogólnić na dowolny genus.

Weźmy dwa pełne torusy $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}_2$ *i dyfeomorfizm okręgu* $\mathbb{S}^1 \times \{(1,0)\}$ *na krzywą reprezentującą element* (p,q) *w grupie podstawowej na brzegu drugiego torusa. Pokazać, że ten dyfeomorfizm rozszerza się na dyfeomorfizm brzegów. Skleić nim dwa torusy i zadumać się nad powstałą przestrzenią soczewkową* $L(p,q)$.

Pokazać równoważne definicje: podzielić $\mathbb{D}_3 \subset \mathbb{C}^2$ *przez działanie* $\mathbb{Z}_p$ *na* $\mathbb{S}^3$*, generowane przez*

$$(x,y) \mapsto (e^{2\pi i/p}x, e^{2\pi iq/p}y)$$

q *względnie pierwsze z* p*. Skonstruować przestrzenie soczewkowe przez utożsamianie ścian brył. Przemyśleć, jakie są zyski z każdej definicji.*
Przestrzenie soczewkowe są bardzo ciekawe, gdyż stanowią najprostszy przykład rozmaitości, które nie są klasyfikowane przez swój typ homotopii. Znaleźć szczegóły na ten temat (Hatcher, ale polecam szukanie na własną rękę), spróbować wypisać triangulację przestrzeni soczewkowej i dobudować do niej funkcję Morse'a.

Pokleiwszy rozmaicie torusy, spróbujmy pokleić inne powierzchnie: każda (orientowalna?) rozmaitość trójwymiarowa powstaje przez sklejenie brzegiem dwóch pełnych torusów tego samego genusu.

Mamy wszystko by zdefiniować i docenić chirurgie Dehna. Mając rozmaitość trójwymiarową (bez brzegu) i węzeł (albo warkocz, czyli skończenie wiele nieprzecinających się wzajemnie węzłów), możemy dobudować mu otoczenie tubularne, wyrzucić je i do powstałego brzegu (który jest torusem lub sumą torusów) doklejać dyfeomorfizmami pełne torusy. Jak już wiemy, otrzymana rozmaitość będzie istotnie zależeć od wybranego doklejenia.

Właściwymi nazwiskami do ostatniej części powyższych zadań są Lickorish i Wallace. Ich wynik stanowi o sile chirurgii Dehna: każda rozmaitość trójwymiarowa powstaje przez chirurgię na pewnym warkoczu w $\mathbb{S}^3$.

3. Okropna ilość zadań (głównie z Hirscha).

Każda grupa Liego ma trywialną wiązkę styczną. Zwrócić uwagę na sfery.

$T\mathbb{S}^n \oplus \epsilon^1 = \epsilon^{n+1}$, czyli wiązka styczna sfery jest stabilnie trywialna.

Jeśli TM ma nieznikającą sekcję i $TM \oplus \epsilon^1$ i $TN \oplus \epsilon^1$ są trywialne, wtedy $T(M \times N)$ jest trywialna.

Zastosować do iloczynu sfer z jednym czynnikiem nieparzystowymiarowym. Czy istnieje iloczyn parzystowymiarowych sfer, który jest paralelizowalny? Poszukać wzoru na ilość liniowo niezależnych (w każdym punkcie) pól wektorowych na sferze w zależności od wymiaru (ale w internecie, a nie na własną rękę! przyda się nazwisko Adamsa).

Każda wiązka zanurza się w wiązce trywialnej (daje się uzupełnić do wiązki trywialnej).

Jeśli ktoś nie został w trakcie studiów przekonany, że interesujące są tylko przestrzenie parazwarte, to dwa ćwiczenia: powyższe ćwiczenie nie jest prawdziwe dla rozmaitości nieparazwartych; podzbiór kwadratu kartezjańskiego długiej prostej leżący pod przekątną $((x, y)|x \leqslant)$ jest rozmaitością o brzegu homeomorficznym z długą prostą, który "is unlikely", by miał kołnierz.

Zapoznać się z trwającą od wieków dyskusją na temat twierdzenia Jordana i Schönfliesa. Podać standardowe przykłady na przynależność tego ostatniego do fenomenów topologii jednowymiarowej. Daje się wszakże pokazać następujące twierdzenie: jeśli zanurzenie $\mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ daje się rozszerzyć na $\mathbb{S}^n \times I$, to daje się rozszerzyć na dyfeomorfizm $\mathbb{R}^{n+1}$ na siebie. W szczególności - działa dla podrozmaitości gładkich.

Wiązki tautologiczne, rozmaitości Grassmanna. Przyswoić sobie konstrukcję tych rozmaitości. Znaleźć ich homologie, choć niekoniecznie wchodząc w szczegóły. Skonstruować wiązki tautologiczne (wiązka nad Grassmannianem gdzie włókno nad punktem to właśnie ten punkt), pokonstruować dla różnych wiązek odwzorowania, które cofają do nich wiązki tautologiczne (proszę nie zajmować się jedynością, czy śrubowaniem wyników). Zastanowić się, jakie są topologiczne efekty (w Grassmannianach) rozmaitych konstrukcji przeprowadzanych na wiązkach.