

Seminar on Methods of Approximation Theory

Jagiellonian University – Kraków

2015–...

Lecture topics

Academic year 2015–2016

1. [07.10.2015] *Organizational meeting*
2. [14.10.2015] Marta Kosek, *Professor Franci-szek Leja*
3. [21.10.2015] Grzegorz Lewicki, *Bernstein's Lethargy Theorem in Frechet Spaces* (1)
4. [28.10.2015] Grzegorz Lewicki, *Bernstein's Lethargy Theorem in Frechet Spaces* (2)
5. [04.11.2015] Grzegorz Lewicki, *Bernstein's Lethargy Theorem in Frechet Spaces* (3)
6. [18.11.2015] Leokadia Białas-Cieź, *Twierdzenie Tchaloffa w sieciach dopuszczalnych*
7. [25.11.2015] Grzegorz Sroka, *Nierówność Bernsteina-Markowa* (1)
8. [02.12.2015] Grzegorz Sroka, *Nierówność Bernsteina-Markowa* (2)
9. [09.12.2015] Barbara Lewandowska, *Minimalność projekcji Rademachera w zbiorze projekcji uogólnionych*
10. [16.12.2015] Tomasz Kobos, *Projekcje minimalne na hiperpłaszczyzny* (1)¹
11. [13.01.2016] Tomasz Kania (University of Warwick), *Steinhaus' lattice-point problem for Banach spaces*²
12. [20.01.2016] Tomasz Kobos, *Projekcje minimalne na hiperpłaszczyzny* (2)
13. [27.01.2016] Magdalena Nowak, *Fraktale euklidesowe*³
14. [24.02.2016] Grzegorz Sroka, *Nierówności typu A.A. Markowa na zbiorach z ostrzami*
15. [02.03.2016] Grzegorz Sroka, *Nierówności W.A. Markowa w normach L^p z wagami Jacobiego* (1)
16. [09.03.2016] Grzegorz Sroka, *Nierówności W.A. Markowa w normach L^p z wagami Jacobiego* (2)
17. [23.03.2016] Krzysztof Winowski, *Ciągłe selekcje metryczne w przestrzeni L_1*
18. [30.03.2016] Maciej Klimek, *Stochastyczna aproksymacja złożonych zbiorów Julii*⁴
19. [06.04.2016] Michael Prophet (University of Northern Iowa), *Shape-preserving projections*
20. [13.04.2016] Michał Kozdęba, *Podprzestrzenie proksyminalne w iloczynach tensorowych* (1)
21. [20.04.2016] Michał Kozdęba, *Podprzestrzenie proksyminalne w iloczynach tensorowych* (2)
22. [27.04.2016] Bogusława Karpińska, *Spójność zbiorów Julii dla funkcji meromorficznych i słabo odpychające punkty stałe*⁵
23. [04.05.2016] Grzegorz Lewicki, *Ciągłość selekcji metrycznej dla podprzestrzeni jednowymiarowych ciągłych przestrzeni Lorentza* (1)
24. [11.05.2016] Sławomir Dinew, *The minimum sets and free boundaries of strictly plurisubharmonic functions*
25. [18.05.2016] Grzegorz Lewicki, *Ciągłość selekcji metrycznej dla podprzestrzeni jednowymiarowych ciągłych przestrzeni Lorentza* (2)
26. [25.05.2016] Jerzy Szczepański, *P.L. Czebyszew (1821-1894) – przegląd osiągnięć*
27. [01.06.2016] Leokadia Białas-Cieź, *Division*

¹Streszczenie. Z twierdzenia Bohnenblusta wynika, że jeżeli X jest n -wymiarową przestrzenią unormowaną, zaś Y jest jej $(n-1)$ -wymiarową podprzestrzenią, to istnieje projekcja P z X na Y o normie nie przekraczającej $2-2/n$. Udowodnimy warunek charakteryzujący przypadek równości w twierdzeniu Bohnenblusta oraz podamy szereg jego zastosowań.

²Abstract. Steinhaus proved that given a positive integer n , one may find a circle surrounding exactly n points of the integer lattice. This statement has been recently extended to Hilbert spaces where the integer lattice was replaced by any infinite set that intersects every ball in at most finitely many points. We investigate Banach spaces satisfying this property, which we call (S), and we characterise them by means of a new geometric property of the unit sphere which allows us to show, e.g., that all strictly convex norms have (S), nonetheless, there are plenty of non-strictly convex norms satisfying (S). We also study the corresponding renorming problem. Assuming that the Lebesgue measure can be extended to a measure defined on the power set of the reals, we construct a Banach space that has (S) but it does not have a strictly convex renorming. This is joint work with T. Kochanek (Warsaw).

³Streszczenie. Podczas referatu przedstawię zagadnienia z teorii fraktali, związane z atraktorami klasycznych iterowanych układów funkcyjnych (IFS), złożonych z kontrakcji Banacha, działających na przestrzeni zupełnej. *Fraktalem euklidesowym* nazywamy przestrzeń homeomorficzną z atraktorem IFS w przestrzeni euklidesowej. Pokażę warunek wystarczający na to, aby przestrzeń zwarta była fraktalem euklidesowym.

⁴Streszczenie. Pokazane zostanie, że analogicznie do teorii iterowanych układów funkcji możliwe jest probabilistyczne podejście do aproksymacji częściowo wypełnionych złożonych zbiorów Julii. W przeciwieństwie do klasycznej teorii, nie przekłada się to bezpośrednio na wizualizację komputerową, gdyż zbieżność w przestrzeni zbiorów pluriregularnych nie jest kompatybilna ze zbieżnością zbiorów zwartych względem naturalnej metryki Hausdorffa. Można jednak uzyskać taki rodzaj zbieżności i możliwość stosowania metod Monte Carlo w inny sposób, co również zostanie zademonstrowane.

⁵Streszczenie. Referat dotyczy dynamiki funkcji meromorficznych na płaszczyźnie zespolonej. W 1919 roku Fatou udowodnił, że każda funkcja wymierna stopnia większego niż 1 ma co najmniej jeden słabo odpychający punkt stały w płaszczyźnie domkniętej (punkt stały przekształcenia holomorficznego nazywa się słabo odpychający, jeśli jest odpychający lub pochodna w tym punkcie jest równa 1). W 1990 roku Shishikura wykazał, że jeśli f jest funkcją wymierną, której zbiór Julii jest niespójny, to f ma co najmniej dwa słabo odpychające punkty stałe. Dla funkcji przestępnych sytuacja jest bardziej skomplikowana; takie funkcje mogą w ogóle nie mieć punktów stałych. Od wczesnych lat 90. podejmowano próby odpowiedzi na pytanie, czy każda funkcja meromorficzna przestępna z niespójnym zbiorem Julii ma co najmniej jeden słabo odpychający punkt stały. Omówię wyniki otrzymane w ostatnich latach, które pozwoliły odpowiedzieć na to pytanie twierdząco.

inequalities, czyli nierówności typu Schura
28. [08.06.2016] Maciej Ciesielski, *Struktura geo-*

metryczna przestrzeni symetrycznych i zastosowanie w teorii aproksymacji

Academic year 2016–2017

29. [05.10.2016] *Organizational meeting*
30. [12.10.2016] Elżbieta Zazulak, *Matematyczne aspekty skal muzycznych*
31. [19.10.2016] Ihor Chyzykov, *Growth description of p -th means of the Green potential in the unit ball*⁶
32. [26.10.2016] Tomasz Beberok, *L^p ograniczoność projekcji Bergmana na uogólnionych trójkątach Hartogsa*
33. [16.11.2016] Grzegorz Lewicki, *Uwagi na temat twierdzenia Rudina*
34. [30.11.2016] Maciej Ciesielski, *Jednostajna K -monotoniczność i jej zastosowania w teorii aproksymacji*
35. [07.12.2016] Grzegorz Sroka, *Analytic Sets* (1)
36. [14.12.2016] Grzegorz Sroka, *Analytic Sets* (2)
37. [21.12.2016] Grzegorz Sroka, *Analytic Sets* (3)
38. [04.01.2017] Grzegorz Sroka, *Analytic Sets* (4)
39. [11.01.2017] Grzegorz Sroka, *Analytic Sets* (5)
40. [18.01.2017] Bartosz Micherda, *O własnościach porządkowych operatora najlepszej aproksymacji w przestrzeniach Musielaka-Orlicza*
41. [25.01.2017] Grzegorz Sroka, *Analytic Sets* (6)
42. [01.03.2017] Marta Kosek, *O przestrzeni podzbiorów zwartych, wielomianowo wypukłych i pluriregularnych \mathbb{C}^n*
43. [08.03.2017] Małgorzata Stawiska-Friedland (Mathematical Reviews), *Zupełność przestrzeni miar probabilistycznych \mathbb{R}^N w pewnej*

- metryce związanej z transformatą Fouriera*
44. [15.03.2017] Jarosław Duda, *Teoria aproksymacji w nieliniowej klasyfikacji oraz parametryzacji kształtu*⁷
45. [22.03.2017] Maciej Ciesielski, *Jednostajna K -monotoniczność w przestrzeniach symetrycznych z zastosowaniem w teorii aproksymacji*
46. [05.04.2017] Michał Kozdęba, *Projekcja minimalna na pewną podprzestrzeń $L_p(S \times T)$* (1)
47. [12.04.2017] Maciej Klimek, *Aproksymacja zespolonych funkcji Greena za pomocą metod Monte-Carlo*
48. [26.04.2017] Michał Kozdęba, *Projekcja minimalna na pewną podprzestrzeń $L_p(S \times T)$* (2)
49. [10.05.2017] Shmuel Friedland, *Tensors*⁸
50. [17.05.2017] Tomasz Beberok, *Oszacowanie normy projekcji Bergmana na L^p*
51. [24.05.2017] Michał Kozdęba, *Projekcja minimalna na pewną podprzestrzeń $L_p(S \times T)$* (3)
52. [31.05.2017] Leokadia Białas-Cieź, *Division inequalities for polynomials*
53. [07.06.2017] Grzegorz Lewicki, *Kilka uwag o ciągłych selekcjach*
54. [14.06.2017] Tomasz Kobos, *Odległość Grünbauma ciał wypukłych na płaszczyźnie*

Academic year 2017–2018

55. [04.10.2017] *Spotkanie organizacyjne*
56. [11.10.2017] Marta Kosek, *O przestrzeni zbiorów zwartych regularnych wielomianowo wypukłych*
57. [18.10.2017] Marta Kosek, *O aproksymacji pewnych zbiorów typu Julia i nie tylko*
58. [25.10.2017] Grzegorz Lewicki, *O pewnej kla-*

- sie norm w przestrzeniach modularnych*
59. [15.11.2017] Tomasz Beberok, *Przestrzeń Blocha i norma projekcji Bergmana*
60. [22.11.2017] Marta Kosek, *O aproksymacji w przestrzeni zbiorów zwartych regularnych wielomianowo wypukłych*
61. [29.11.2017] Tomasz Kobos, *O odległości*

⁶Abstract. We describe the growth of p th means, p th means, $1 < p < \frac{2n-1}{2(n-1)}$ of the invariant Green potential in the unit ball in \mathbb{C}^n in terms of smoothness properties of a measure. In particular, a criterion of boundedness of p th means of the potential is obtained, a result of M. Stoll is generalized. Joint work with Mariya Voitovich.

⁷Streszczenie. Chciałbym przedstawić i przedyskutować przykładowe możliwości zastosowania teorii aproksymacji w bardzo modnym dzisiaj uczeniu maszynowym. Pierwsza to modelowanie skomplikowanych funkcji gęstości na podstawie próbek danych, przykładowo dopasowanie do nich wielomianu (lub szeregu Fouriera). Otrzymane zbiory np. semialgebraiczne mogą być użyte do nieliniowej klasyfikacji. Drugi temat to problem opisu kształtu przykładowo molekuly chemicznej - wyborze i dopasowywaniu parametryzacji kształtu.

⁸Abstract. Tensor, or multiarrays with at least three indices, are ubiquitous in modern applications, mainly due to data explosion. While matrices, two indices, are well understood and widely used, tensors pose theoretical and numerical challenges. Tensors also arise naturally in quantum physics, when dealing with multi particle systems. In this talk, for general mathematical audience, we will describe several fundamental results and problems in tensors: tensor ranks, symmetric rank of symmetric tensors, low rank approximation of tensors, spectral and nuclear norm of tensors and their numerical computations.

Banacha-Mazura

62. [06.12.2017] Maciej Denkowski, *Zbieżność Kuratowskiego szkieletów z zastosowaniem w teorii osobliwości*
63. [13.12.2017] Grzegorz Lewicki, *Własności operatora najlepszej aproksymacji w przestrzeni $l_1(X)$*
64. [10.01.2018] Leokadia Białas-Cieź, *Punkty pseudo-Leji i hipoteza stałych Lebesgue'a*
65. [17.01.2018] Marta Kosek, *O aproksymacji zbiorami typu Julii*
66. [17.03.2018] Marta Kosek, *Własności wypukłościowe oraz K -monotonicznościowe w przestrzeniach symetrycznych*
67. [28.03.2018] Grzegorz Lewicki, *Kilka uwag o absolutnej stałej projekcji (1)*
68. [04.04.2018] Grzegorz Lewicki, *Kilka uwag o absolutnej stałej projekcji (2)*
69. [11.04.2018] Leokadia Białas-Cieź, *Pewne optymalne węzły interpolacyjne na łukach konforemnych*
70. [18.04.2018] Jerzy Szczepański, *Uwagi o definiowaniu wielomianów Czebyszewa*
71. [25.04.2018] Maciej Ciesielski, *Ciągowe przestrzenie Lorentza $\Gamma_{1,w}$*
72. [09.05.2018] Michał Kozdęba, *Maksymalne i quasi-maksymalne stałe projekcji*
73. [16.05.2018] Maciej Ciesielski, *O ścisłej wypukłości przestrzeni $\Gamma_{p,w}$*
74. [30.05.2018] Rafał Pierzchała, *Zbiory semialgebraiczne i warunek Łojasiewicza-Siciaka*
75. [06.06.2018] Maciej Denkowski, *O zespolonej nierówności Łojasiewicza z parametrem*

Academic year 2018–2019

76. [03.10.2018] *Spotkanie organizacyjne*
77. [10.10.2018] Marta Kosek, *O pewnych uczniach profesora Leji*
78. [17.10.2018] Leokadia Białas-Cieź, *Funkcja ekstremalna na rozmaitościach analitycznych*
79. [24.10.2018] Grzegorz Lewicki, *Zbiory kontrakcyjne i podprzestrzenie 1-uzupełnialne (1)*
80. [07.11.2018] Grzegorz Lewicki, *Zbiory kontrakcyjne i podprzestrzenie 1-uzupełnialne (2)*
81. [14.11.2018] Marta Kosek, *O pewnych podzbiorach przestrzeni Klimka i innych metrykach na pewnych jej podrodzinach*
82. [05.12.2018] Grzegorz Lewicki, *Zbiory kontrakcyjne i podprzestrzenie 1-uzupełnialne (3)*
83. [12.12.2018] Anna Denkowska, *Nierówność Bernsteina-Walsha-Siciaka dla multifunkcji analitycznych*
84. [16.01.2019] Michał Kozdęba, *O jedyności pewnej projekcji minimalnej*
85. [23.01.2019] Tomasz Kobos, *O odległości Banacha-Mazura na płaszczynie*
86. [20.03.2019] Michał Kozdęba, *O jedyności pewnej projekcji minimalnej*
87. [03.04.2019] Marta Kosek, *O metrykach na przestrzeni zbiorów zwartych regularnych*
88. [10.04.2019] Jerzy Szczepański, *Tożsamości typu Cassiniego-Catalana dla wielomianów Czebyszewa*
89. [17.04.2019] Maciej Klimek, *Układy prawie ortonormalne i funkcje Bergmana*
90. [08.05.2019] Tomasz Beberok, *Nierówność A. Markowa na pewnych zbiorach z ostrzami w normie L^p*
91. [15.05.2019] Leokadia Białas-Cieź, *Funkcje plurisubharmoniczne na zbiorach analitycznych*
92. [22.05.2019] Grzegorz Lewicki, *Kryterium na minimalność projekcji minimalnych (1)*
93. [29.05.2019] Grzegorz Lewicki, *Kryterium na minimalność projekcji minimalnych (2)*
94. [05.06.2019] Grzegorz Lewicki, *Kryterium na minimalność projekcji minimalnych (3)*
95. [12.06.2019] Tomasz Kobos, *Operatory 2-sumujące i twierdzenie Kadeca-Snobar*

Academic year 2019–2020

96. [02.10.2019] *Organizational meeting*
97. [09.10.2019] Stefano De Marchi (Universita degli Studi di Padova), *Solving discontinuities by polynomials and discontinuous kernels*
98. [23.10.2019] Michał Kozdęba, *O kolejnym zastosowaniu twierdzenia Rudina*
99. [30.10.2019] Marta Kosek, *O maksimum wielomianu na odcinku*
100. [06.11.2019] Leokadia Białas-Cieź, *Pewien związek wykładnika Łojasiewicza z teorią pluriipotencjału*
101. [13.11.2019] Jerzy Szczepański, *Wielomiany Czebyszewa i kwaterniony*
102. [27.11.2019] Grzegorz Lewicki, *Kilka uwag o zbiorach kontrakcyjnych (1)*
103. [04.12.2019] Grzegorz Lewicki, *Kilka uwag o zbiorach kontrakcyjnych (2)*
104. [11.12.2019] Grzegorz Lewicki, *Kilka uwag o zbiorach kontrakcyjnych (3)*
105. [18.12.2019] Grzegorz Lewicki, *Kilka uwag o zbiorach kontrakcyjnych (4)*
106. [08.01.2020] Tomasz Kobos, *Projekcje o normie L_1*
107. [22.01.2020] Jerzy Szczepański, *Rozkład zer i*

biegunów funkcji poligamma
108. [26.02.2020] Grzegorz Lewicki, *Zbiory kontr-*

akcyjne i zbiory istnienia (1)

[Break due to the covid19 pandemic until March 2021]

Academic year 2020–2021

109. [03.03.2021] Grzegorz Lewicki, *Zbiory kontr-*
akcyjne i zbiory istnienia (2)
110. [17.03.2021] Grzegorz Lewicki, *Zbiory kontr-*
akcyjne i zbiory istnienia (3)
111. [24.03.2021] Jerzy Szczepański, *Pewne zasto-*
sowania splotu multiplikatywnego
112. [14.04.2021] Leokadia Białas-Cieź, *Nierówno-*
ści wielomianowe typu division-substraction
113. [21.04.2021] Piotr Kopacz (Uniwersytet Mor-
ski w Gdyni), O deformacji metryk Riemana-
na polami wektorowymi w kontekście geome-
*trii Finslera-Lagrange'a*⁹

114. [28.04.2021] Grzegorz Lewicki, *Projekcje mi-*
minimalne w przestrzeni l_1 (1)
115. [05.05.2021] Grzegorz Lewicki, *Projekcje mi-*
minimalne w przestrzeni l_1 (2)
116. [12.05.2021] Grzegorz Lewicki, *Twierdzenie*
Schaudera o punkcie stałym w przestrzeniach
Fréchéta
117. [26.05.2021] Maciej Denkowski (UJ), Anna
Denkowska (UEK), *Zbieżność zbiorów konflik-*
*towych*¹⁰
118. [09.06.2021] Tomasz Kobos, *Nieliniowe od-*
wzorowania zachowujące semiiloczyn skalarny

Academic year 2021–2022

119. [06.10.2021] *Spotkanie organizacyjne*
120. [12.01.2022] Grzegorz Lewicki, *O operatorze*
Chalmersa-Metcalfa (1)
121. [19.01.2022] Grzegorz Lewicki, *O operatorze*
Chalmersa-Metcalfa (2)
122. [26.01.2022] Leokadia Białas-Cieź, *Sieci do-*
puszczalne na zbiorach algebraicznych
123. [02.03.2022] Marta Kosek, *Stulecie Annales*
Polonici Mathematici (1)
124. [16.03.2022] Marta Kosek, *Stulecie Annales*
Polonici Mathematici (2)
125. [23.03.2022] Tomasz Kobos, *Aproksymacja w*
normie L_1
126. [30.03.2022] Grzegorz Lewicki, *O absolutnej*
stałej projekcji – problem Pelczyńskiego
127. [06.04.2022] Tomasz Kobos, *O wypukłości*
zbiorów Czebyszewa w skończenie wymiarowej

przestrzeni
128. [04.05.2022] Dimitri Jordan Kenne, *Polyno-*
mial interpolation in \mathbb{C}^n and pseudo-Leja se-
quences (1)
129. [11.05.2022] Dimitri Jordan Kenne, *Polyno-*
mial interpolation in \mathbb{C}^n and pseudo-Leja se-
quences (2)
130. [18.05.2022] Marta Kosek, *Od Czebyszewa do*
*Greena*¹¹
131. [25.05.2022] Leokadia Białas-Cieź, *Interpola-*
tion error via admissible meshes
132. [01.06.2022] Barbara Lewandowska, *Dolne*
ograniczenie wartości $\lambda(5)$, które wydaje się
być jej dokładną wartością
133. [08.06.2022] Grzegorz Lewicki, *Projekcje mi-*
minimalne generowane przez macierze znaków

⁹Streszczenie. Metoda konstruowania pewnych metryk Finslera oparta na deformowaniu dowolnych metryk Riemanna lub Hermite'a za pomocą stycznych do różności pól wektorowych nazywana jest *nawigacją* (lub *deformacją*) *Zermelo w rzeczywistej i zespolonej geometrii Finslera*, odpowiednio. W zależności od normy działającego pola zależnego od punktów przestrzeni otrzymujemy w efekcie silnie wypukłą metrykę (pseudo-)Randersa lub Kropiny. Geodezyjne w tych metrykach mają własność lokalnej minimalizacji czasu przejścia między dwoma punktami przestrzeni. Inna droga z zastosowaniem lagranżjanu (lub hamiltonianu) i równań Eulera-Lagrange'a prowadzi do odpowiadających im ekstremali, które otrzymujemy z układu równań ruchu i warunku na optymalną nawigację w sensie czasu. W referacie zamierzam porównać oba podejścia, omówić uogólnione warunki optymalności i klasyfikację rozwiązań problemu Zermelo w zależności od rodzajów działających pól wektorowych.

¹⁰Streszczenie. *Zbiorem konfliktowym* skończonego układu domkniętych i niepustych, parami rozłącznych podzbiorów właściwych \mathbb{R}^n nazywamy ogół punktów przestrzeni, których odległość do sumy danych zbiorów realizowana jest przynajmniej w dwu różnych zbiorach. W przypadku, gdy wyjściowe zbiory są singletonami, ich zbiór konfliktowy nosi nazwę *diagramu Woronoja*. Zbiory konfliktowe znajdują zastosowanie w tak odległych dziedzinach jak rozpoznawanie obrazów, ekonomia czy geografia. W referacie pochylimy się nad problemem półciągłości zbiorów konfliktowych w sytuacji z parametrem, gdy układ zbiorów ewoluuje wraz ze zmianą parametru, przy czym zbiory mogą na siebie nachodzić (tracimy rozłączność) lub zanikać. Dopuszczamy parametry wielowymiarowe, ewolucja wyrażona jest w języku zbieżności Kuratowskiego. Jedyne ograniczenie, jakie narzucamy, aby uniknąć nieujarzmionej topologii, to definiowalność rozważanych zbiorów w pewnej strukturze \mathcal{o} -minimalnej (np. semialgebraiczność).

¹¹Streszczenie. Przyjrzymy się pewnym ciągom funkcyjnym, zbudowanym przy użyciu wielomianów Czebyszewa, jak również pewnym ciągom zbiorów zwartych regularnych na płaszczyźnie. Kluczowe role odgrywają zespolona funkcja Greena oraz pewien (pomocniczy, wcale nie główny) wynik Klimka z jego artykułu z 2001 roku.

Academic year 2022–2023

134. [05.10.2022] *Organizational meeting*
135. [12.10.2022] Jerzy Szczepański, *Aproksymacja wielomianowa funkcji regularnych w sensie Cullena* (1)
136. [19.10.2022] Jerzy Szczepański, *Aproksymacja wielomianowa funkcji regularnych w sensie Cullena* (2)
137. [26.10.2022] Leokadia Białas-Cieź, *Zastosowania twierdzenia Rouchégo w badaniu stabilności wielomianów*
138. [09.11.2022] Beata Deręgowska, *O oszacowaniu absolutnych stałych projekcji*
139. [16.11.2022] Grzegorz Lewicki, *Kilka rezultatów o relatywnych stałych projekcji* (1)
140. [23.11.2022] Grzegorz Lewicki, *Kilka rezultatów o relatywnych stałych projekcji* (2)
141. [07.12.2022] Jerzy Szczepański, *Activities of the Polish Academy of Arts and Sciences for education*¹²
142. [14.12.2022] Dimitrios Vavitsas, *Cyclic polynomials in Dirichlet-type spaces in the unit ball of \mathbb{C}^{213}*
143. [11.01.2023] *Organizational meeting*
144. [18.01.2023] Krzysztof Maciaszek, *Geometry of uniqueness varieties for a three-point Pick problem in the tridisc*¹⁴
145. [08.03.2023] Benedikt Magnússon, *Polynomials with exponents in compact convex sets and associated weighted extremal functions*¹⁵
- [15.03.2023] Day of the Faculty of Mathematics and Computer Science
146. [22.03.2023] Grzegorz Lewicki, *On a forgotten theorem of A. Pelczyński*
147. [29.03.2023] Dimitri Jordan Kenne, *Transfinite diameter of Bernstein sets*
148. [05.04.2023] Tomasz Kobos, *On the dimension of the set of minimal projections*
149. [12.04.2023] Małgorzata Stawiska-Friedland (AMS/Mathematical Reviews), *A certain eigenvector–eigenvalue relation from the viewpoint of exterior algebra*¹⁶
150. [19.04.2023] Agnieszka Kowalska (Pedagogical University of Cracow), *Bernstein-Chebyshev inequality and Baran’s radial extremal function on algebraic sets*
151. [12.05.2023 Friday] Tomasz Beberok (ANS Tarnów), *L^p Markov exponent of certain UPC sets*
152. [17.05.2023] Przemysław Sprus, *On polynomial Julia sets*¹⁷
153. [31.05.2023] Álfheidur Edda Sigurdardóttir, *Weighted pluripotential theory with respect to*

¹²Abstract. We present the activities of the members of the Polish Academy of Arts and Sciences for mathematical education in the years 1919–1952 and their continuation in the years 2001–2022.

¹³Abstract. The three classical Hilbert spaces of holomorphic functions in the unit ball are the Hardy, Bergman and Dirichlet spaces. All of them are special cases of a space family that depends on a real parameter, called Dirichlet-type spaces. Given a fixed parameter $a \in \mathbb{R}$ the Dirichlet-type space, denoted by $D_a(B_2)$, consists of holomorphic functions $f(z, w) = \sum_{k,l=0}^{\infty} a_{k,l} z^k w^l$ such that $\sum_{k,l=0}^{\infty} (2+k+l)^a k! l! [(1+k+l)!]^{-1} |a_{k,l}|^2 < \infty$. We characterize polynomials that are cyclic for the continuous linear operators $\{S_1, S_2\}$ induced by multiplication by the coordinate functions: $S_i : f \mapsto z_i \cdot f$, called shift operators. The full characterization follows: let $p \in \mathbb{C}[z, w]$ be an irreducible polynomial non-vanishing in the unit ball. If $a \leq 3/2$, then p is cyclic in $D_a(B_2)$. If $3/2 < a \leq 2$, then p is cyclic in $D_a(B_2)$ if and only if it has finitely many zeros or it has no zeros in the unit sphere. If $a > 3/2$, then p is cyclic if and only if it has no zeros in the unit sphere.

¹⁴Abstract. In this talk we will present a special class of two-dimensional algebraic subvarieties M_a of the unit tridisc, denoted as the sets $\{(z_1, z_2, z_3) \in D^3 : a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 = \bar{a}_1 z_2 z_3 + \bar{a}_2 z_3 z_1 + \bar{a}_3 z_1 z_2\}$. We will discuss motivations to study this family, its connection to the 3-point Pick interpolation and will describe several geometric properties of M_a . We will also sketch the proof of the biholomorphic equivalence between any two surfaces M_a and M_b , where the triples a and b satisfy the so called triangle inequality.

¹⁵Abstract. The usual grading of polynomials uses the unit simplex, i.e. polynomials of degree n have exponents in an n fold dilation of the unit simplex. It is interesting to see what changes when the simplex is replaced by a general compact convex body, especially from the viewpoint of pluripotential theory. Polynomials (with the usual grading) are closely connected to pluripotential theory, e.g. in connection with extremal functions and approximations. Many of these connections can be generalized to polynomials with more general grading, but often with restrictions on the convex body. In particular we will consider characterization of polynomials by L^2 estimates.

¹⁶Abstract. In 2019 Denton, Parker, Tao and Zhang proved an identity expressing coordinates of eigenvectors of Hermitian matrices solely in terms of the corresponding eigenvalues. The identity generated considerable interest and discussion within the mathematical community, and it turned out it was discovered and re-discovered multiple times, the first time in 1834 by Jacobi. In this talk we will prove our own version of this identity. We consider arbitrary square matrices over \mathbb{C} and allow eigenvalues of multiplicity greater than 1, and prove that the identity in question holds for eigenvectors associated to the eigenvalue λ holds if and only if the geometric multiplicity of λ equals its algebraic multiplicity. In the proof we use exterior algebra. The approach is accessible to advanced students.

¹⁷Abstract. The aim of this talk is to present the basic foundations of the theory of iteration of complex polynomials. We will discuss the properties of Julia sets and use some of them in proofs of facts about the shape of Julia sets of quadratic polynomials. We will also mention some results concerning convex hulls of these sets.

References: A. F. Beardon, P. J. Rippon, *A remark on the shape of quadratic Julia sets*, Nonlinearity 7, 1277–1280, (1994) and <https://doi.org/10.1090/proc/15224>.

¹⁸Abstract. A polynomial is of degree m if its exponents are contained in the m -th dilate of the unit simplex. If the unit simplex is replaced by any compact convex set, we obtain a new grading of the polynomial ring. We work with a Siciak function with respect to the new grading. That function generally has different growth that logarithmic,

- convex sets*¹⁸
154. [07.06.2023] Bergur Snorrason, *Growth of plurisubharmonic functions and multivariate polynomials*¹⁹
155. [14.06.2023] Izabela Mandla, *Pewne uogólnienie rezultatu Benko i Totika o wielomianach ekstremalnych*

Academic year 2023–2024

156. [04.10.2023] *Organizational meeting*
157. [11.10.2023] Jerzy Kąkol (UAM, Poznań), *About Banach-Mazur's problem from the 1930s*²⁰
158. [25.10.2023] Marta Kosek, *Non-autonomous Julia sets for sequences of polynomials used in the approximation of the complex Green function*²¹
159. [08.11.2023] Przemysław Sprus, *Some remarks on filled-in Julia sets*²²
160. [15.11.2023] Tomasz Beberok, *On L_p Bernstein-type inequalities*²³
161. [29.11.2023] Michał Kudra, *Solution to the problem of Hadamard powers of stable polynomials using Hermite-Biehler Theorem*
162. [06.12.2023] Grzegorz Lewicki, *On two-strongly unique best approximation in the complex case*²⁴ (1)
163. [13.12.2023] Dimitri Jordan Kenne, *Numerical computation of pseudo-Leja points*
164. [20.12.2023] Grzegorz Lewicki, *On two-strongly unique best approximation in the complex case* (2)
165. [10.01.2024] Tomasz Kobos, *Spaces with maximal projection constants revisited*²⁵
166. [17.01.2024] Leokadia Białas-Cieź, *Dubiner's distance and admissible meshes*
167. [28.02.2024] *Organizational meeting*
168. [06.03.2024] Grzegorz Lewicki, *Minimal projections onto the lines with respect to L_p norm*

so we work with a Siciak-Zakharyuta/pluricomplex Green-function with matching growth, and see when we have equality, i.e. a Siciak-Zakharyuta theorem. This was content from the preprint <https://arxiv.org/abs/2305.04779> (and <https://arxiv.org/abs/2305.08260> (and <https://arxiv.org/abs/2305.04779>)).

¹⁹Abstract. A common tool in pluripotential theory are extremal functions. One type of extremal functions are the Siciak-Zakharyuta functions. The Bernstein-Walsh theorem describes how these functions relate analytic continuation to polynomial approximations. The subject of discussion will be a generalization of the Siciak-Zakharyuta extremal function which leads to a generalization of the Bernstein-Walsh theorem. This generalization is achieved by focusing on plurisubharmonic functions that grow like logarithmic supporting functions of a convex compact set, instead of simply considering logarithmic growth.

²⁰Abstract. One of the famous unsolved problems in Functional Analysis asks (Banach-Mazur's problem (1932)) if every infinite-dimensional Banach space can be mapped by a continuous linear operator onto an infinite-dimensional separable Banach space. This problem is known under the name Separable quotient problem. For many concrete Banach spaces the answer is positive, for example, reflexive Banach spaces, or even weakly compactly generated Banach spaces. Argyros, Dodos and Kanellopoulos, proved that every dual Banach space has a separable quotient. On the other hand, Rosenthal showed that all Banach spaces $C(X)$ of continuous (real-valued) functions on X have a quotient isomorphic to c_0 or l_2 . We provide several useful methods to examine which Banach spaces admit a separable quotient, and the same problem will be studied for spaces $C_p(X)$ with the pointwise topology. The talk gathers also quite new results. A connection with Efimov compact spaces X will be also discussed.

²¹Abstract. We consider sequences of polynomials satisfying the conditions of the well known Kalmar-Walsh theorem. We investigate the non-autonomous filled Julia sets of such sequences. Our toy example is given by the Chebyshev polynomials on the interval.

²²Abstract. We will study some disks contained in the filled-in Julia sets associated with complex polynomials of the form $f(z) = z^n + c$ for some values $c \in [-2, \frac{1}{4}]$ and $n \geq 2$.

References: D. Dumitru, R. Ioan, *Some remarks on filled-in Julia sets*, An. Univ. Oradea Fasc. Mat.

²³Abstract. In this talk we verify sharp Bernstein-type inequalities for multivariate algebraic polynomials in L_p norm on the simplex and certain two-dimensional cuspidal domains. The talk will be based partly on the article *Sharp Bernstein inequalities on simplex* by Yan Ge and Yuan Xu.

²⁴Abstract. During my talk the following theorem will be proved. Let X be a Banach space over \mathbb{C} and $Y \subset X$ be a finite-dimensional subspace. Let $x \in X \setminus Y$. Assume that $P_Y(x) = \{0\}$ where $P_Y(x) = \{y \in Y : \|x - y\| = \text{dist}(x, Y)\}$. Let $E(x) = \{f \in \text{ext}(S(X^*)) : f(x) = \|x\|\}$ be a finite set consisting of n elements. Assume that $M = \sup\{|f(x)| : f \in \text{Ext}(S(X^*)) \setminus |E|(x) < \|x\|\}$, if $\text{Ext}(S(X^*)) \setminus |E|(x) \neq \emptyset$, where $|E|(x) = \{f \in \text{ext}(S(X^*)) : |f(x)| = \|x\|\}$. Then there exists $r > 0$ such that for any $y \in Y$, $\|x - y\|^2 \geq \|x\|^2 + r\|y\|^2$.

²⁵Abstract. The absolute projection constant is an important numerical invariant of the normed space, related to some other well-known notions of the theory of Banach spaces. Projection constants have been extensively studied for several decades. This field has a long history of remarkable results, but interestingly, also of some incorrect proofs. The first correct proof of the fact that $4/3$ is the maximal possible value of an absolute projection constant of a real two-dimensional normed spaces was published by Chalmers and Lewicki in 2010. Only recently, Deregowska and Lewandowska determined the maximal possible value of projection constant in every dimension n , for which there exists an equiangular tight frame of the maximal cardinality. These include the dimensions $n = 2, 3, 7, 23$ in the real case and up to dimension $n = 17$ in the complex case. Based on the reasoning of Deregowska and Lewandowska, we are able to characterize all spaces with the maximal projection constant in the aforementioned dimensions. During the process, we shall discuss the history of the existing literature on this subject, including some incorrect and incomplete reasonings. As a result, we obtain that the two-dimensional real normed space with the regular hexagon as a unit ball is the unique two-dimensional real normed space with the maximal projection constant. In every other dimension a space with a maximal projection constant is not unique.

169. [20.03.2024] Marta Kosek, *A few remarks on the complex Green function and its application*
170. [27.03.2024] Przemysław Sprus, *Convex hulls of polynomial Julia sets*²⁶
171. [10.04.2024] Grzegorz Lewicki, *On 2-strongly unique best approximation*
172. [24.04.2024] Jakub Markowiak, *Criteria for strong unicity of best approximation in Banach spaces*
173. [08.05.2024] Tomasz Kobos, *Real normed spaces with the maximal Banach-Mazur distance to the Euclidean space in dimensions two and three*²⁷
174. [15.05.2024] Barbara Lewandowska, *On the maximal absolute projection constant*²⁸
175. [22.05.2024] Leokadia Białas-Cieź, *Związek wielomianów stabilnych w sensie Hurwitza z formami dodatnio określonymi*
176. [29.05.2024] Przemysław Sprus, *On discs and ellipses contained in filled Julia sets*²⁹
177. [05.06.2024] Mateusz Suder, *On Dubiner distance and admissible meshes over simplex and ball*³⁰
178. [12.06.2024] Grzegorz Lewicki, *O operatorze Chalmersa-Metcalfa*

Academic year 2024–2025

179. [02.10.2024] *Organizational meeting*
180. [09.10.2024] Przemysław Sprus, *Total disconnectedness of Julia sets of random quadratic polynomials*³¹
181. [16.10.2024] Marta Kosek, *On the complex Green function and non-autonomous Julia sets.*
182. [23.10.2024] Grzegorz Lewicki, *Two strong unicity in complex $l_1^{(n)}$ space.*
183. [30.10.2024] Tomasz Kobos, *2-strong uniqueness of a best approximation in complex normed spaces*³². (1)
184. [06.11.2024] Grzegorz Lewicki, *On some applications of the Chalmers-Metcalf operator.*
185. [13.11.2024] Tomasz Kobos, *2-strong uniqueness of a best approximation in complex normed spaces.* (2)
186. [20.11.2024] Mateusz Suder, *Optimal node*

²⁶Abstract. We will prove that for every complex polynomial p of degree $d \geq 2$ the convex hull H_p of the Julia set J_p of p satisfies $p^{-1}(H_p) \subset H_p$. We will also characterise polynomials for which the equality $p^{-1}(H_p) = H_p$ is achieved. References: M. Stawiska, *Convex hulls of polynomial Julia sets*, Proceedings of the AMS, Vol. 149, No. 1, January 2021, pp. 245-250.

²⁷Abstract. One of the classical consequences of the famous John ellipsoid theorem is the fact that the Banach-Mazur distance of the n -dimensional Euclidean space and arbitrary n -dimensional normed space is not greater than \sqrt{n} . Moreover, it is easy to see that this estimate is optimal, for example for the l_∞ space of dimension n or l_1 space of dimension n . In dimensions $n \geq 4$ it is well-known that there are also other examples of spaces with the distance \sqrt{n} , which are not isometric to l_1 or l_∞ . However, what happens in the case of dimensions two and three? In this talk we shall provide an answer to this question and additionally a stability result in the planar case.

²⁸Abstract. Let X be a Banach space and Y be its finite-dimensional subspace. Let $P(X, Y)$ denote the set of all linear and continuous projections from X onto Y , recalling that an operator P is called a *projection onto Y* if $P|_Y = Id_Y$. We define the relative projection constant of Y and X by $\lambda(Y, X) := \inf\{\|P\| : P \in P(X, Y)\}$ and the absolute projection constant of Y by $\lambda(Y) := \sup\{\lambda(Y, X) : Y \subset X\}$, and finally, the maximal absolute projection constant by $\lambda(m) := \sup\{\lambda(Y) : \dim(Y) = m\}$. In the talk, we briefly present recent work on the subject and make conjectures based on some new concepts.

²⁹Abstract. In this talk, we will refer to the results mentioned in the previous term. We will present some additional results concerning closed discs and ellipses contained in the filled Julia sets associated with polynomials $f_c(z) = z^2 + c$ for $c \in [-2, 1/4]$. We will investigate also a few non-autonomous Julia sets.

³⁰Abstract. Recent studies have shown that when interpolating over compact bodies, the covering radius of an admissible mesh with respect to the Dubiner distance can be used as a measure of performance. In this talk, we will review some basic properties of the Dubiner distance and then design new meshes for simplex and ball, focusing on the minimization of the covering radius.

³¹Abstract. For a sequence of complex parameters (c_n) we consider the composition of functions $f_{c_n}(z) = z^2 + c_n$, the non-autonomous version of the classical quadratic dynamical system. The definitions of Julia and Fatou sets are naturally generalized to this setting. We answer a question posed by Brück, Büger and Reitz, whether the Julia set for such a sequence is almost always totally disconnected, if the values c_n are chosen randomly from a large disc. Our proof is easily generalized to answer a lot of other related questions regarding typical connectivity of the random Julia set. In fact we prove the statement for a much larger family of sets than just discs; in particular if one picks c_n randomly from the main cardioid of the Mandelbrot set, then the Julia set is still almost always totally disconnected. References: K. Lech, A. Zdunik, *Total disconnectedness of Julia sets of random quadratic polynomials*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. 42 (2022), 1764–1780.

³²Abstract. We study a property of 2-strong uniqueness of an element of best approximation in a class of finite-dimensional complex normed spaces, for which the unit ball is an absolutely convex hull of finite number of points and in its dual class. Such norms can be considered a complex counterpart of the real norms with a polytopal unit ball. We provide several examples of situations, where a uniqueness of an element of a best approximation in a given linear subspace implies its 2-strong uniqueness. In particular, such a property holds for approximation in an arbitrary subspace of the complex l_1^m space, but not of the complex l_∞^m space. However, this is true in general under an additional assumption that a subspace has a real basis and an ambient complex normed space is generated by real vectors or functionals.

³³Abstract. This talk provides a survey of known optimal node sets for bivariate interpolation, with a focus on generalization to the trivariate case through Lissajous curves for cubes. Additionally, we will discuss the Dubiner distance, presenting some of its general properties and conjectures in relevance to the multivariate interpolation.

- sets and Dubiner distance in multivariate polynomial interpolation.*³³
187. [27.11.2024] Barbara Lewandowska, *Systems of vectors determining projection constants.*
188. [04.12.2024] Tomasz Kobos, *Equilateral sets in the Banach-Mazur distance* (joint paper with Konrad Swanepoel).
189. [11.12.2024] Alvise Sommariva (Padua University), *On the application of tensorial rules.*
190. [18.12.2024] Michał Kudra, *On Hurwitz stable polynomials constructed by means of so-called attached polynomials.*
191. [08.01.2025] Grzegorz Lewicki, *On some norms in modular spaces.*
192. [15.01.2025] ..., ...
193. [22.01.2025] ..., ...

The data was collected by Jerzy Szczepański (updated January 3rd, 2025). Please send any corrections and additions to the address `jerzy.szczepanski [at] uj.edu.pl`

People delivering lectures at the seminar

Beberok, Tomasz, 3, 4, 6, 7
Białas-Cieź, Leokadia, 2–8

Chyzhykov, Ihor, 3
Ciesielski, Maciej, 3, 4

De Marchi, Stefano, 4
Denkowska, Anna, 4, 5
Denkowski, Maciej, 4, 5
Deregowska, Beata, 6
Dinew, Sławomir, 2
Duda, Jarosław, 3

Friedland, Shmuel, 3

Kania, Tomasz, 2
Karpińska, Bogusława, 2
Kenne, Dimitri Jordan, 5–7
Klimek, Maciej, 2–4
Kobos, Tomasz, 2–9
Kopacz, Piotr, 5
Kosek, Marta, 2–5, 7, 8
Kowalska, Agnieszka, 6
Kozdęba, Michał, 2–4
Kudra, Michał, 7, 9
Kąkol, Jerzy, 7

Lewandowska, Barbara, 2, 5, 8, 9

Lewicki, Grzegorz, 2–9

Maciaszek, Krzysztof, 6
Magnússon, Benedikt, 6
Mandla, Izabela, 7
Markowiak, Jakub, 8
Micherda, Bartosz, 3

Nowak, Magdalena, 2

Pierzchała, Rafał, 4
Prophet, Michael, 2

Sigurdardóttir, Álfheidur Edda, 6
Snorrason, Bergur, 7
Sommariva, Alvis, 9
Sprus, Przemysław, 6–8
Sroka, Grzegorz, 2, 3
Stawiska-Friedland, Małgorzata, 3, 6
Suder, Mateusz, 8
Szczepański, Jerzy, 2, 4–6

Vavitsas, Dimitrios, 6

Winowski, Krzysztof, 2

Zazulak, Elżbieta, 3

