Objętość zbiorów podpoziomicowych funkcji plurisubharmonicznych

Paweł Zapałowski

Referat wygłoszony na Seminarium Analizy Zespolonej w dniach 20 i 27 listopada 2000.

Niech Ω będzie obszarem w $\mathbb{C}^n$, a $\mathrm{PSH}(\Omega)$ – stożkiem funkcji plurisubharmonicznych u na Ω takich, że $u \not\equiv -\infty$. Wtedy $\mathrm{PSH}(\Omega) \subset \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Niech λ oznacza miarę Lebesgue'a w $\mathbb{C}^n$. Dla funkcji $u \in \mathrm{PSH}(\Omega)$ definujemy na Ω dodatnią miarę borelowską $\mu_u := (1/2\pi)\Delta u$. Dla ustalonego punktu $a \in \Omega$ oraz $0 < r < d_\Omega(a) := \inf\{|z-a| : z \notin \Omega\}$ definiujemy *masę projektywną* prądu $dd^c u$

$$\nu_u(a,r) := \int_{B(a,r)} dd^c u \wedge (dd^c \log|z-a|)^{n-1},$$

gdzie $B(a,r) := \{z \in \mathbb{C}^n : |z-a| < r\}$. *Liczba Lelonga* funkcji u w punkcie a wyraża się teraz wzorem

$$\nu_u(a) = \lim_{r\to 0} \nu_u(a,r) = \lim_{r\to 0} \frac{\mu_u(B(a,r))}{\tau_{2n-2} r^{2n-2}},$$

gdzie $\tau_{2n-2} = \pi^{n-1}/(n-1)!$ jest objętością kuli jednostkowej w $\mathbb{C}^{n-1}$.

Dla niepustej klasy $\mathcal{U} \subset \mathrm{PSH}(\Omega)$ definiujemy

$$\vartheta_{\mathcal{U}}(a,r) := \sup\{\nu_u(a,r) : u \in \mathcal{U}\},$$

gdzie $a \in \Omega,\ 0 < r < d_\Omega(a)$ oraz określamy *liczbę Lelonga klasy* $\mathcal{U}$ w punkcie a wzorem

$$\vartheta_{\mathcal{U}}(a) := \lim_{r\to 0} \vartheta_{\mathcal{U}}(a,r) = \inf_{r>0} \vartheta_{\mathcal{U}}(a,r).$$

Twierdzenie 1. *Niech $K \subset \Omega$ będzie zbiorem zwartym oraz $\mathcal{U} \subset \mathrm{PSH}(\Omega)$ klasą taką, że $\sup_{a\in K} \vartheta_{\mathcal{U}}(a) < 2$. Wtedy dla dowolnego otwartego otoczenia $\omega \subset\subset \Omega$ zbioru K istnieje otoczenie $E \subset\subset \omega$ zbioru K oraz stałe $c_1, c_2 > 0$ takie, że*

$$\log\Big(\int_E e^{-u} d\lambda\Big) \leqslant c_1 \int_\omega |u| d\lambda + c_2, \quad u \in \mathcal{U}.$$

Twierdzenie 2. *Niech $K \subset\subset \Omega$ będzie zbiorem zwartym oraz niech $\mathcal{U} \subset \mathrm{PSH}(\Omega)$ będzie klasą taką, że $\vartheta := \sup_{a\in K} \vartheta_{\mathcal{U}}(a) < +\infty$. Wtedy dla dowolnej liczby $\alpha < 2/\vartheta$ oraz dla dowolnego otoczenia $\omega \subset\subset \Omega$ zbioru K istnieją stałe $c_1, c_2 > 0$ takie, że*

$$\log \lambda\big(\{z \in K : u(z) < t\}\big) \leqslant c_1 \int_\omega |u| d\lambda + c_2 + \alpha t, \quad t < 0,\ u \in \mathcal{U}.$$