Wewnętrzna $C^{1,1}$ regularność zdegenerowanego rzeczywistego równania Monge'a-Ampère'a

Zbigniew Błocki, 8,15 stycznia 2001

Głównym celem referatu jest pokazanie następujej wewnętrznej regularności rozwiązań zdegenerowanego rzeczywistego równania Monge'a-Ampère'a:

Twierdzenie 1. *Załóżmy, że Ω jest ograniczonym, wypukłym obszarem w $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Niech ψ będzie nieujemną funkcją na Ω taką, że $\psi^{1/(n-1)} \in C^{1,1}(\overline{\Omega})$. Wtedy istnieje jedyna funkcja $u \in C^{1,1}(\Omega)$, wypukła w Ω i taka, że* $\det D^2 u = \psi$ *oraz* $\lim_{x \to \partial\Omega} u(x) = 0$.

Analogiczną globalną regularność zdegenerowanego równania Monge'a-Ampère'a udowodniono w [1] (zob. także [2]) przy dodatkowych założeniach na Ω. Dzięki [4, Example 3], wykładnik $1/(n-1)$ w Twierdzeniu 1 jest optymalny.

Głównym krokiem w dowodzie Twierdzenia 1 jest następujące wewnętrzne oszacowanie a priori dla drugiej pochodnej rozwiązań równania Monge'a-Ampère'a:

Twierdzenie 2. *Załóżmy, że funkcja $u \in C^4(\Omega) \cap C^{1,1}(\overline{\Omega})$ jest silnie wypukłym rozwiązaniem równania*

$$\det D^2 u = \psi$$

w ograniczonym obszarze Ω, takim, że $u = 0$ na $\partial\Omega$. Wtedy dla α takiego, że

$$\alpha \begin{cases} = n-1 & \text{dla } n \geq 3, \\ > 1 & \text{dla } n = 2, \end{cases}$$

mamy

$$(-u)^\alpha |D^2 u| \leq C \quad \text{w} \;\; \Omega,$$

gdzie C jest stałą dodatnią zależną tylko od n (od α dla $n = 2$) oraz od górnych ograniczeń $\operatorname{diam}\Omega$, $||\psi^{1/(n-1)}||_{C^{1,1}(\overline{\Omega})}$ *i* $||u||_{C^{0,1}(\overline{\Omega})}$.

Twierdzenie 2 jest ulepszeniem oszacowania Pogorelova (zob. [3, str. 73-76]).

[1] P. Guan, *C^2 a priori estimates for degenerate Monge-Ampère equations*, Duke Math. J. 86 (1997), 323-346.

[2] P. Guan, N.S. Trudinger, X.-J. Wang, *On the Dirichlet problem for degenerate Monge-Ampère equations*, Acta Math. 182 (1999), 87-104.

[3] A.V. Pogorelov, *The Minkowski Multidimensional Problem*, Wiley, New York, 1973.

[4] X.-J. Wang, *Some counterexamples to the regularity of Monge-Ampère equations*, Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995), 841-845.