Regularność zdegenerowanego równania Monge'a-Ampère'a na zwartych rozmaitościach kählerowskich

Zbigniew Błocki, 7,14 stycznia 2002

Niech M będzie zwartą rozmaitością kählerowską wymiaru n z formą Kählera ω. Oznacza to, że lokalnie możemy zapisać $\omega = dd^c g$, gdzie g jest funkcją ściśle plurisubharmoniczną klasy C^∞. Przez $P(M)$ oznaczamy zbiór funkcji $\varphi : M \to [-\infty, \infty)$ takich, że lokalnie $\varphi + g$ jest funkcją plurisubharmoniczną. Jest to równoważne temu, że

$$\omega_\varphi := dd^c\varphi + \omega \geq 0$$

na M. Dla $\varphi \in P \cap L^\infty(M)$ mamy nieujemną miarę borelowską $\omega_\varphi^n = \omega_\varphi \wedge \cdots \wedge \omega_\varphi$ na M. Jeżeli f jest funkcją ciągłą i nieujemną na M spełniającą warunek konieczny

$$\int_M f\omega^n = \int_M \omega^n,$$

to z [K1] (istnienie) i [K2] (jednoznaczność) wynika, że istnieje dokładnie jedno rozwiązanie problemu Dirichleta

$$\begin{cases} \varphi \in P \cap C(M) \\ \omega_\varphi^n = f\omega^n \\ \int_M \varphi\omega^n = 0. \end{cases}$$

Twierdzenie Yau [Y] (z którego wynika hipoteza Calabiego) można teraz sformułować następująco: jeżeli $f \in C^\infty(M)$, $f > 0$, to $\varphi \in C^\infty$.

Celem referatu było udowodnienie następującej regularności w przypadku zdegenerowanym (tzn. niekoniecznie $f > 0$ wszędzie na M).

Twierdzenie. *Niech $n \geq 2$. Jeżeli $f \in C^{1/(n-1)}(M)$, to $\Delta\varphi \in L^\infty(M)$. Ponadto*

$$\sup_M |\Delta\varphi| \leq C,$$

gdzie stała C zależy tylko od M oraz od oszacowania górnego na $||f^{1/(n-1)}||_{C^{1,1}}$.

Zauważmy, że z tego, że $\Delta\varphi \in L^\infty$ wynika, że $\varphi \in W^{2,p}$ dla wszystkich $p < \infty$, ale z tego nie wynika, że $\varphi \in W^{2,\infty} = C^{1,1}$. Przypuszczamy, że w powyższym twierdzeniu zawsze mamy $\varphi \in C^{1,1}$.

Dzięki lokalnej regularności zespolonego operatora Monge'a-Ampère'a (zob. [1, Theorem 2.6]) powyższy rezultat jest uogólnieniem twierdzenia Yau.

[1] Z. Błocki, *On the regularity of the complex Monge-Ampère operator*, Complex geometric analysis in Pohang (1997), Contemp. Math. 222, pp. 181-189, Amer. Math. Soc., 1999.

[2] S. Kołodziej, *The complex Monge-Ampère equation*, Acta Math. 180 (1998), 69-117.

[3] S. Kołodziej, *Stability of solutions to the complex Monge-Ampère equation on compact Kähler manifolds*, ukaże się w Indiana Univ. Math. J.

[4] S.-T. Yau, *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation, I*, Comm. Pure Appl. Math. 31 (1978), 339-411.