Jednoznaczność równania Monge'a-Ampère'a

na zwartych rozmaitościach kählerowskich

Zbigniew Błocki, 8.04.2002

Niech M będzie zwartą rozmaitością kählerowską wymiaru n z formą Kählera ω. Oznacza to, że lokalnie możemy zapisać $\omega = dd^c g$, gdzie g jest funkcją ściśle plurisubharmoniczną klasy C^∞. Przez $P(M)$ oznaczamy zbiór funkcji $\varphi : M \to [-\infty, \infty)$ takich, że lokalnie $\varphi + g$ jest funkcją plurisubharmoniczną. Jest to równoważne temu, że

$$\omega_\varphi := dd^c\varphi + \omega \geq 0$$

na M.

Np. w przypadku przestrzeni projektywnej $\mathbb{P}^n$ możemy zapisać $\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^n \cup \mathbb{P}^{n-1}$, gdzie $\mathbb{P}^{n-1} = \{[z_0 : z_1 : \cdots : z_n] \in \mathbb{P}^n : z_0 = 0\}$ jest hiperpłaszczyzną w nieskończoności. Metryka Fubiniego-Study'ego na $\mathbb{P}^n$ dana jest przez potencjał określony na $\mathbb{C}^n$

$$g(z) = \frac{1}{2}\log(1 + |z|^2), \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Dzięki temu, że $\mathbb{P}^{n-1}$ jest w szczególności zbiorem pluripolarnym w $\mathbb{P}^n$, można pokazać, że odwzorowania

$$\begin{aligned} P(\mathbb{P}^n) \ni \varphi &\longmapsto g + \varphi|_{\mathbb{C}^n} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) \\ P \cap L^\infty(\mathbb{P}^n) \ni \varphi &\longmapsto g + \varphi|_{\mathbb{C}^n} \in \mathcal{L}_+(\mathbb{C}^n) \end{aligned}$$

są bijektywne.

Dla $\varphi \in P \cap L^\infty(M)$ mamy nieujemną miarę borelowską $\omega_\varphi^n = \omega_\varphi \wedge \cdots \wedge \omega_\varphi$ na M. Celem referatu było pokazanie dowodu następującego twierdzenia w przypadku $n = 2$.

Twierdzenie 1. *Jeżeli $\varphi, \psi \in P \cap L^\infty(M)$ są takie, że $\omega_\varphi^n = \omega_\psi^n$, to $\varphi - \psi = const$.*

Dowód (n=2). Oznaczmy $\rho := \varphi - \psi$. Mamy

$$0 = \omega_\varphi^2 - \omega_\psi^2 = dd^c\rho \wedge (\omega_\varphi + \omega_\psi),$$

zatem całkując przez części dostaniemy

$$\int_M d\rho \wedge d^c\rho \wedge (\omega_\varphi + \omega_\psi) = -\int_M \rho\, dd^c\rho \wedge (\omega_\varphi + \omega_\psi) = 0,$$

skąd wynika, że

$$d\rho \wedge d^c\rho \wedge \omega_\varphi = d\rho \wedge d^c\rho \wedge \omega_\psi = 0. \tag{1}$$

Dzięki temu i całkowaniu przez części mamy

$$\int_M d\rho \wedge d^c\rho \wedge \omega = -\int_M d\rho \wedge d^c\rho \wedge dd^c\varphi = \int_M d\rho \wedge d^c\varphi \wedge (\omega_\psi - \omega_\varphi).$$

Z nierówności Schwarza dostaniemy

$$\left|\int_M d\rho \wedge d^c\varphi \wedge \omega_\psi\right| \leq \left(\int_M d\rho \wedge d^c\rho \wedge \omega_\psi\right)^{1/2} \left(\int_M d\varphi \wedge d^c\varphi \wedge \omega_\psi\right)^{1/2} = 0$$

dzięki (1). Podobnie

$$\int_M d\rho \wedge d^c\varphi \wedge \omega_\varphi = 0,$$

a stąd

$$\int_M d\rho \wedge d^c\rho \wedge \omega = 0$$

skąd natychmiast wynika, że $\rho = const.$ ■

Powyższe twierdzenie dla $M = \mathbb{P}^n$ (a dokładnie jego alternatywne sformułowanie: jeżeli $u, v \in \mathcal{L}_+(\mathbb{C}^n)$, $(dd^cu)^n = (dd^cv)^n$, to $u - v = const$) zostało udowodnione w znacznie bardziej skomplikowany sposób w [1]. W przypadku dowolnego M zostało ono pokazane w [2] dla funkcji, których miary Monge'a-Amṕer'a mają gęstości w $L^p(M)$ dla pewnego $p > 1$.

Korzystając z metody dowodu Twierdzenia 1 można pokazać następującą stabilność rozwiązań równania Monge'a-Ampére'a.

Twierdzenie 2. *Dla $\varphi, \psi \in P \cap L^\infty(M)$ mamy*

$$\int_M d(\varphi - \psi) \wedge d^c(\varphi - \psi) \wedge \omega^{n-1} \leq C \left(\int_M (\psi - \varphi)(\omega_\varphi^n - \omega_\psi^n)\right)^{2^{1-n}},$$

gdzie C stałą dodatnią zależną tylko od n oraz od górnych ograniczeń na $||\varphi||_{L^\infty(M)}$, $||\psi||_{L^\infty(M)}$ oraz objętość M.

Bezpośrednim wnioskiem z Twierdzenia 2 i nierówności Sobolewa jest następująca stabilność.

Theorem 3. *Niech $\varphi, \psi \in P \cap L^\infty(M)$ będą takie, że $\int_M \varphi\omega^n = \int_M \psi\omega^n$ oraz $\omega_\varphi^n = f\omega^n$, $\omega_\psi^n = g\omega^n$ dla pewnych $f, g \in L^1(M)$. Wtedy, dla $n \geq 2$, mamy*

$$||\varphi - \psi||_{L^{\frac{2n}{n-1}}(M)} \leq C||f - g||_{L^1(M)}^{2^{-n}},$$

gdzie C jest stałą dodatnią zależną tylko od M oraz od górnych ograniczeń na $||\varphi||_{L^\infty(M)}$ i $||\psi||_{L^\infty(M)}$.

[1] E. Bedford, B.A. Taylor, *Uniqueness for the complex Monge-Ampère equation for functions of logarithmic growth*, Indiana Univ. Math. J. 38 (1989), 455-469.

[2] S. Kołodziej, *Stability of solutions to the complex Monge-Ampère equation on compact Kähler manifolds*, ukaże się w Indiana Univ. Math. J.