Metryka Bergmana i zespolona funkcja Greena

Zbigniew Błocki, 28.10.2002, 4.11.2002

Diederich i Ohsawa [1] pokazali, że jeżeli Ω jest ograniczonym gładkim (klasy C^2) obszarem pseudowypukłym w $\mathbb{C}^n$, to dla ustalonego $w_0 \in \Omega$ oraz $w \in \Omega$ w pobliżu brzegu zachodzi natępujące dolne oszacowanie na odległość względem metryki Bergmana

$$\mathrm{dist}_\Omega(w, w_0) \geq \frac{1}{C} \log\log(1/\delta_\Omega(w)),$$

gdzie $\delta_\Omega(w)$ oznacza odległość euklidesową do brzegu a $C > 0$ stałą zależną tylko od Ω. Głównym rezultatem jest następujące ulepszenie tego oszacowania

$$\mathrm{dist}_\Omega(w, w_0) \geq \frac{\log(1/\delta_\Omega(w))}{C \log\log(1/\delta_\Omega(w))}. \tag{1}$$

Pokazujemy także, że w przypadku obszarów wypukłych (niekoniecznie gładkich) zachodzi optymalne oszacowanie

$$\mathrm{dist}_\Omega(w, w_0) \geq \frac{1}{C} \log(1/\delta_\Omega(w)).$$

W przeciwieństwie do [1], głównym narzędziem jest zespolona funkcja Greena (a nie jej skomplikowany technicznie odpowiednik), pokazujemy w szczególności (korzystając z odpowiednich oszacowań dla operatora $\overline{\partial}$), że dla dowolnego obszaru pseudowypukłego zachodzi

$$\{g_{\Omega,w} \leq -1\} \cap \{g_{\Omega,\widetilde{w}} < -1\} = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \mathrm{dist}_\Omega(w, \widetilde{w}) \geq c_n > 0. \tag{2}$$

Korzystając z (2), udowodnienie (1) sprowadza się do odp. oszacowania dla funkcji Greena dla gładkich obszarów pseudowypukłych korzystając z metod z pracy Herborta [2] (które przy okazji dość znacznie uproszczono).

[1] K. Diederich, T. Ohsawa, *An estimate for the Bergman distance on pseudoconvex domains*, Ann. of Math. 141 (1995), 181-190.

[2] G. Herbort, *The pluricomplex Green function on pseudoconvex domains with a smooth boundary*, Internat. J. Math. 11 (2000), 509-522.