Dziedzina zespolonego operatora Monge'a-Ampère'a

Zbigniew Błocki, Kraków, 6.10.2003

Wstęp

Jednym z podstawowych faktów w klasycznej teorii potencjału jest to, że dla dowolnej funkcji subharmonicznej u można dobrze zdefiniować dodatnią regularną miarę borelowską Δu. Podobnie (choć jest to trudniejsze do pokazania), jeżeli u jest dowolną funkcją wypukłą, to można dobrze zdefiniować rzeczywistą miarę Monge'a-Ampère'a $\det D^2 u$. W teorii pluripotencjału jednak jednym z problemów jest to, że zespolonego operatora Monge'a-Ampére'a

$$M(u) := \det \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} \right), \quad u \in C^\infty, \tag{1}$$

nie można dobrze zdefiniować jako miary regularnej dla dowolnej funkcji plurisubharmonicznej (psh) u. Jako pierwsi pokazali to Shiffman i Taylor (zob. [9]). Prostszy przykład podał Kiselman [8]: funkcja

$$u(z) := (-\log |z_1|)^{1/n}(|z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2 - 1)$$

jest psh w otoczeniu 0, gładka poza zbiorem $\{z_1 = 0\}$, jednak $\det(u_{j\overline{k}})$ nie jest sumowalne w pobliżu $\{z_1 = 0\}$.

Bedford i Taylor [1] udowodnili, że miarę $M(u)$ można dobrze zdefiniować dla lokalnie ograniczonych funkcji psh tak, że operator M jest ciągły dla ciągów malejących, tzn. M jest określone na $PSH \cap L^\infty_{loc}$, spełnia (1) oraz

$$PSH \cap L^\infty_{loc} \ni u_j \downarrow u \in PSH \cap L^\infty_{loc} \Longrightarrow M(u_j) \rightsquigarrow M(u)$$

(słaba zbieżność miar). Demailly [7] uogólnił ten wynik dla funkcji psh, które są lokalnie ograniczone poza zbiorem zwartym. Zbieżność monotoniczna funkcji psh w powyższych rezultatach jest naturalna w świetle przykładu Cegrella [4]: istnieje ciąg $u_j \in PSH \cap C^\infty$ zbieżny do $u \in PSH \cap C^\infty$ w L^p dla każdego $p < \infty$, taki, że $M(u_j) \not\rightsquigarrow M(u)$.

W związku z tym całkowicie logiczną jest następująca definicja dziedziny zespolonego operatora Monge'a-Ampère'a: dla zbioru otwartego $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ przez $\mathcal{D}(\Omega)$ oznaczamy zbiór funkcji $u \in PSH(\Omega)$, dla których istnieje miara μ taka, że jeżeli U jest otwartym podzbiorem Ω oraz $PSH \cap C^\infty(U) \ni u_j \downarrow u$, to $M(u_j) \rightsquigarrow \mu$ (w U). Miarę μ oznaczamy wtedy przez $M(u)$. Można łatwo pokazać, że

$$\mathcal{D} \ni u_j \downarrow u \in \mathcal{D} \Longrightarrow M(u_j) \rightsquigarrow M(u). \tag{2}$$

Oznacza to, że $\mathcal{D}$ jest maksymalną podklasą klasy funkcji psh, w której można zdefiniować operator M spełniający (1) i (2).

Następujący przykład Cegrella [5] pokazuje, że w definicji $\mathcal{D}$ trzeba rozpatrywać wszystkie ciągi aproksymujące, a nie wystarczy tylko jeden: jeżeli

$$u(z) := \log|z_1 \dots z_n|,$$

to z jednej strony $M(\max\{u, c\}) = 0$ (c - stała), ale $M(u*\rho_{1/j}) \rightsquigarrow n!2^n\delta_0$. Po lekkiej modyfikacji pierwszego ciągu otrzymamy dwa gładkie ciągi aproksymujące, których miary Monge'a-Ampère'a są zbieżne do różnych miar. Oznacza to, że $u \notin \mathcal{D}$.

Główne wyniki

Twierdzenie 1 ([2]). *Jeżeli $n = 2$, to $\mathcal{D} = PSH \cap W^{1,2}_{loc}$.*

Twierdzenie 2 ([3]). *Jeżeli $\mathcal{D} \ni u \leq v \in PSH$, to $v \in \mathcal{D}$.*

Przy pomocy operatorów $d = \partial + \overline{\partial}$, $d^c = i(\overline{\partial} - \partial)$ (mamy wtedy $dd^c u = 2i\partial\overline{\partial}u$ oraz $(dd^c u)^n = n!4^n M(u)$) możemy całkowicie scharakteryzować klasę $\mathcal{D}$ również dla dowolnego n:

Twierdzenie 3 ([3]). *Dla ujemnej funkcji psh u w zbiorze otwartym Ω w $\mathbb{C}^n$ następujące warunki są równoważne:*

i) $u \in \mathcal{D}(\Omega)$;

ii) Dla dowolnego zbioru otwartego $U \subset \Omega$ i <u>każdego</u> ciągu aproksymującego $PSH \cap C^\infty(U) \ni u_j \downarrow u$ ciąg miar $(dd^c u_j)^n$ jest lokalnie słabo ograniczony w U;

iii) Dla dowolnego zbioru otwartego $U \subset \Omega$ i <u>każdego</u> ciągu aproksymującego $PSH \cap C^\infty(U) \ni u_j \downarrow u$ ciągi miar

$$|u_j|^{n-2-p} du_j \wedge d^c u_j \wedge (dd^c u_j)^p \wedge \omega^{n-p-1}, \quad p = 0, 1, \dots, n-2, \tag{3}$$

($\omega := dd^c|z|^2$ jest formą Kählerowską w $\mathbb{C}^n$) są lokalnie słabo ograniczone w U;

iv) Dla każdego $z \in \Omega$ istnieje otwarte otoczenie $U \subset \Omega$ punktu z oraz <u>istnieje</u> ciąg aproksymujący $PSH \cap C^\infty(U) \ni u_j \downarrow u$ taki, że ciągi (3) są lokalnie słabo ograniczone w U.

Zauważmy, że dla $n = 2$ równoważność warunków iii) oraz iv) jest oczywista, obydwa warunki oznaczają dokładnie, że $u \in PSH \cap W^{1,2}_{loc}(\Omega)$. Dla dowolnego n ta równoważność powoduje, że dla danej funkcji psh, żeby sprawdzić, czy należy ona do $\mathcal{D}$, wystarczy zbadać słabą ograniczoność ciągów (3) dla jednego dowolnego ciągu aproksymującego, np. dla regularyzacji $u * \rho_{1/j}$.

Następujący przykład pokazuje, że warunku słabej ograniczoności ciągów (3) nie można poprawić: dla $q = 1, \dots, n-1$ niech

$$u(z) := \log(|z_1|^2 + \dots + |z_q|^2)$$

i niech $u_j := u * \rho_{1/j}$. Wtedy ciąg (3) jest lokalnie słabo ograniczony dla $p \neq q-1$ (zeruje się dla $p \geq q$), ale nie dla $p = q-1$.

W dowodzie implikacji iii)$\Rightarrow$i) w Twierdzeniu 3 wykorzystano niedawny relutat z pracy Cegrella [6].

Bibliografia

[1] E. Bedford, B.A. Taylor, *A new capacity for plurisubharmonic functions*, Acta Math. 149 (1982), 1-41.

[2] Z. Błocki, *On the definition of the Monge-Ampère operator in* $\mathbb{C}^2$, preprint 2002, http://www.im.uj.edu.pl/~blocki/publ

[3] Z. Błocki, *The domain of definition of the complex Monge-Ampère operator*, preprint 2003, http://www.im.uj.edu.pl/~blocki/publ

[4] U. Cegrell, *Disconituité de l'opérateur de Monge-Ampère complexe*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I Math. 296 (1983), 869-871.

[5] U. Cegrell, *Sums of continuous plurisubharmonic functions and the complex Monge-Ampère operator in* $\mathbb{C}^n$, Math. Z. 193 (1986), 373-380.

[6] U. Cegrell, *The general definition of the complex Monge-Ampère operator*, preprint 2001, ukaże się w Ann. Inst. Fourier.

[7] J.-P. Demailly, *Mesures de Monge-Ampère et mesures plurisousharmoniques*, Math. Z. 194 (1987), 519-564.

[8] C.O. Kiselman, *Sur la définition de l'opérateur de Monge-Ampère complexe*, Proc. Analyse Complexe, Toulouse 1983, Lect. Notes in Math. 1094, 139-150.

[9] Y.-T. Siu, *Extension of meromorphic maps into Kähler manifolds*, Ann. of Math. 102 (1975), 421-462.