Operator hessianowy

Zbigniew Błocki, 5 stycznia 2004

Celem wykładu było omówienie podstawowych pojęć związanych z rzeczywistym i zespolonym operatorem hessianowym.

Przypadek rzeczywisty. Jeżeli u jest gładką funkcją określoną na otwartym podzbiorze $\mathbb{R}^n$, to dla $m = 1, \dots, n$ (przy pewnej sprzeczności oznaczeń) kładziemy

$$S_m(u) = S_m(D^2u) = S_m(\lambda(D^2u)),$$

gdzie $\lambda(A) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ są wartościami własnymi macierzy symetrycznej A,

$$S_m(\lambda) = \sum_{1 \le j_1 < \dots < j_m \le n} \lambda_{j_1} \dots \lambda_{j_m}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

Wtedy $S_1(u) = \Delta u$, zaś $S_n(u) = \det D^2u$ jest rzeczywistym operatorem Monge'a-Ampère'a.

Funkcjami dopuszczalnymi dla operatora S_m są (w przypadku gładkim) te funkcje u, dla których $S_m(u + A|x|^2) \ge 0$ dla wszystkich $A \ge 0$. Jest to równoważne temu, że $S_j(u) \ge 0$ dla $j = 1, \dots, m$. Pojęcie funkcji dopuszczalnej można również dobrze zdefiniować w przypadku niegładkim. Dla $m = 1$ są to dokładnie funkcje subharmoniczne, zaś dla $m = n$ funkcje wypukłe.

Rozwiązaniem fundamentalnym dla operatora S_m jest funkcja

$$\begin{cases} -|x|^{2-n/m}, & m < n/2, \\ \log|x|, & m = n/2, \\ |x|^{2-n/m}, & m > n/2. \end{cases}$$

Przypadek zespolony. Dla gładkiej funkcji u określonej na otwartym podzbiorze $\mathbb{C}^n$ definiujemy

$$S_m^c(u) := S_m((\partial^2u/\partial z_j\partial\overline{z}_k)) = S_m(\lambda(\partial^2u/\partial z_j\partial\overline{z}_k)).$$

Mamy $S^c u = \Delta u/4$, zaś $S_n^c(u) = \det(\partial^2u/\partial z_j\partial\overline{z}_k)$ jest zespolonym operatorem Monge'a-Ampère'a. Funkcjami dopuszczalymi są funkcje subharmoniczne dla $m = 1$, natomiast funkcje plurisubharmoniczne dla $m = n$. Rozwiązaniem fundamentalnym dla operatora S_m^c jest funkcja

$$\begin{cases} -|z|^{2-2n/m}, & m < n, \\ \log|z|, & m = n. \end{cases}$$