Oszacowania Hörmandera, Donnelly'ego-Feffermana i Berndtssona dla operatora $\overline{\partial}$

Zbigniew Błocki, 17,31 maja 2004

Niech Ω będzie obszarem pseudowypukłym w $\mathbb{C}^n$, zaś φ funkcją plurisubharmoniczną w Ω. Jak pokazał Hörmander ([H, Lemma 4.4.1], stałą 2 można poprawić do 1 - zob. także [D, Théorème 4.1]) dla każdej formy $\alpha \in L^2_{loc,(0,1)}(\Omega)$ takiej, że $\overline{\partial}\alpha = 0$ istnieje $u \in L^2_{loc}(\Omega)$ takie, że $\overline{\partial}u = \alpha$ oraz

$$\int_\Omega |u|^2 e^{-\varphi} d\lambda \le \int_\Omega |\alpha|^2_{i\partial\overline{\partial}\varphi} e^{-\varphi} d\lambda.$$

(Wyrażenie $|\alpha|^2_{i\partial\overline{\partial}\varphi}$ w przypadku, gdy φ jest gładkie i ściśle plurisubharmoniczne rozumiemy jako $\sum_{j,k} \varphi^{j\overline{k}} \overline{\alpha}_j \alpha_k$, gdzie $(\varphi^{j\overline{k}})$ jest macierzą odwrotną, sprzężoną do $(\partial^2\varphi/\partial z_j \partial \overline{z}_k)$; jest to najmniejsza funkcja H spełniająca $i\overline{\alpha} \wedge \alpha \le H i\partial\overline{\partial}\varphi$ - ten ostatni warunek ma sens także w przypadku, gdy φ nie jest gładkie.)

Donnelly i Fefferman [DF] pokazali, że jeżeli dodatkowo ψ jest funkcją w Ω taką, że $i\partial\psi\wedge \le i\partial\overline{\partial}\psi$, to znajdziemy $u \in L^2_{loc}(\Omega)$ takie, że $\overline{\partial}u = \alpha$ oraz

$$\int_\Omega |u|^2 e^{-\varphi} d\lambda \le C \int_\Omega |\alpha|^2_{i\partial\overline{\partial}\psi} e^{-\varphi} d\lambda.$$

Berndtsson [B1], [B2] przy powyższych założeniach udowodnił, gdy $0 < \delta < 1$, następujące oszacowanie

$$\int_\Omega |u|^2 e^{-\varphi+\delta\psi} d\lambda \le \frac{4}{\delta(1-\delta)^2} \int_\Omega |\alpha|^2_{i\partial\overline{\partial}\psi} e^{-\varphi+\delta\psi} d\lambda.$$

Przez $C_B(\delta)$ oznaczmy najlepszą stałą w oszacowaniu Berndtssona, wtedy $C_{DF} = C_B(0)$ jest najlepszą stałą w oszacowaniu Donnelly'ego-Feffermana. Celem referatu było udowodnienie następującego rezultatu.

Propozycja. $\dfrac{4}{(1-\delta)(2-\delta)} \le C_B(\delta) \le \dfrac{4}{(1-\delta)^2}, \quad 0 \le \delta < 1.$

Wniosek. $2 \le C_{DF} \le 4.$

[B1] B. Berndtsson, *The extension theorem of Ohsawa-Takegoshi and the theorem of Donnelly-Fefferman*, Ann. Inst. Fourier **46** (1996), 1083-1094.

[B2] B. Berndtsson, *Weighted estimates for the $\overline{\partial}$-equation*, Complex Analysis and Geometry, Columbus, Ohio, 1999, Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ., vol. 9, Walter de Gruyter, 2001, pp. 43-57.

[D] J.-P. Demailly, *Estimations L^2 pour l'opérateur $\overline{\partial}$ d'un fibré vectoriel holomorphe semi-positif au-dessus d'une variété kahlérienne complète*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **15** (1982), 457-511.

[DF] H. Donnelly, C. Fefferman, *L^2-cohomology and index theorem for the Bergman metric*, Ann. of Math. **118** (1983), 593-618.

[H] L. Hörmander, *An introduction to complex analysis in several variables*, D. van Nostrand, Princeton, 1966.