Jądro Bergmana i pojemność logarytmiczna

Zbigniew Błocki, 16.01.2005, 23.01.2005

Niech D będzie ograniczonym obszarem w $\mathbb{C}$. Dla $z \in D$ kładziemy

$$c_D(z) := \lim_{\zeta \to z} \exp(G_D(\zeta, z) - \log|\zeta - z|),$$

gdzie G_D oznacza (ujemną) funkcję Greena D ($c_D(z)$ jest w rzeczywistości pojemnością logarytmiczną dopełnienia D względem z). Suita [6] postawił następującą hipotezę:

$$c_D^2 \leq \pi K_D, \tag{1}$$

gdzie

$$K_D(z) = \sup\{|f(z)|^2 : f \in \mathcal{O}(D), \int_D |f|^2 d\lambda \leq 1\}$$

to jądro Bergmana. Można łatwo pokazać, że w (1) mamy równość dla obszarów jednospójnych, Suita pokazał, że w pierścieniu zachodzi ścisła mierówność.

Ohsawa [4], korzystając z metod dowodu twierdzenia Ohsawy-Takegoshiego [5], pokazał nierówność

$$c_D^2 \leq 750\pi K_D. \tag{1}$$

Berndtsson [3], postępując podobnie jak w swoim dowodzie twierdzenia Ohsawy-Takegoshiego [2], pokazał

$$c_D^2 \leq 6\pi K_D. \tag{2}$$

Naszym głównym rezultatem jest oszacowanie

$$c_D^2 \leq 2\pi K_D. \tag{3}$$

Dowód (3) był trochę inny niż (1) i (2): głównym narzędziem było oszacowanie Berndtssona [1] dla operatora Neumanna dla obszarów w $\mathbb{C}$.

[1] B. Berndtsson, *Weighted estimates for $\overline{\partial}$ in domains in $\mathbb{C}$*, Duke Math. J. 66 (1992), 239-255.

[2] B. Berndtsson, *The extension theorem of Ohsawa-Takegoshi and the theorem of Donnelly-Fefferman*, Ann. Inst. Fourier 46 (1996), 1083-1094.

[3] B. Berndtsson, Personal communication, Beijing, August 2004.

[4] T. Ohsawa, *Addendum to "On the Bergman kernel of hyperconvex domains"*, Nagoya Math. J. 137 (1995), 145-148.

[5] T. Ohsawa, K. Takegoshi, *On the extension of L^2 holomorphic functions*, Math. Z. 195 (1987), 197-204.

[6] N. Suita, *Capacities and kernels on Riemann surfaces*, Arch. Ration. Mech. Anal. 46 (1972), 212-217.