Odpowiedniki funkcji holomorficznych i jądra Bergmana w $\mathbb{R}^n$

Zbigniew Błocki, 10.10.2005, 21.11.2005

Jeżeli Ω jest regularnym ograniczonym obszarem w $\mathbb{C}$ zawierającym 0, to

$$K_\Omega(\cdot, 0) = \frac{\partial v}{\partial z},$$

gdzie v jest rozwiązaniem problemu Dirichleta

$$\Delta v = 0, \quad v = \frac{1}{\pi \bar{z}} \text{ na } \partial\Omega.$$

Można stąd wywnioskować, że $Re\, K_\Omega(\cdot, 0) = div \mathcal{V}$, gdzie $\mathcal{V}$ jest ciągłym polem wektorowym na $\bar{\Omega}$, harmonicznym w Ω i takim, że $\mathcal{V} = \nabla E$, gdzie

$$E(z) = \frac{1}{2\pi} \log |z|$$

jest rozwiązaniem fundamentalnym dla Laplasianu (tj. $\Delta E = \delta_0$). Traktując to jako definicję, widać, że można ją powtórzyć dla obszarów w $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$.

Obserwacja ta doprowadziła do wprowadzenia następujących pojęć: funkcja holomorficzna na obszarze Ω w $\mathbb{R}^n$ jest postaci $f + \omega$, gdzie f jest funkcją rzeczywistą, zaś ω 2-formą taką, że

$$d\omega = 0, \quad d^*\omega = df.$$

Można je traktować jako odwzorowania $\Omega \to \mathbb{A}_n$, gdzie $\mathbb{A}_n = \mathbb{R} \oplus \bigwedge^2((\mathbb{R}^n)^*)$ jest algebrą (głównym punktem konstrukcji jest to, że daje ona mnożenie w $\mathbb{A}_n$, pochodzące ze wzoru na jądro Bergmana). Mamy oczywiście $\mathbb{A}_2 = \mathbb{C}$, okazuje się natomiast, że $\mathbb{A}_3$ jest dokładnie pierścieniem kwaternionów (ta konstrukcja więc ponownie ,,odkrywa" kwaterniony). Algebry $\mathbb{A}_n$ okazują się nieasocjatywne dla $n \geq 4$.