PRZEDŁUŻANIE FUNKCJI ODDZIELNIE HOLOMORFICZNYCH Z OSOBLIWOŚCIAMI (A GENERAL CROSS THEOREM WITH SINGULARITIES)

MAREK JARNICKI, PETER PFLUG (5 GRUDNIA 2005)

Oznaczenia. Dla $2 \leq N \in \mathbb{N}$, niech D_j będzie spójnym obszarem Riemanna nad $\mathbb{C}^{n_j}$ i niech $\varnothing \neq A_j \subset D_j$, $j = 1, \dots, N$. Zdefiniujmy *krzyż*:

$$X = \boldsymbol{X}(A_1, \dots, A_N; D_1, \dots, D_N) = \boldsymbol{X}((A_j, D_j)_{j=1}^N) := \bigcup_{j=1}^N A_1 \times \dots \times A_{j-1} \times D_j \times A_{j+1} \times \dots \times A_N \subset D_1 \times \dots \times D_N.$$

Niech $\Sigma_j \subsetneq A'_j \times A''_j := (A_1 \times \dots \times A_{j-1}) \times (A_{j+1} \times \dots \times A_N)$, $j = 1, \dots, N$. Zdefiniujmy *uogólniony krzyż*:

$$T = \boldsymbol{T}(A_1, \dots, A_N; D_1, \dots, D_N; \Sigma_1, \dots, \Sigma_N) = \boldsymbol{T}((A_j, D_j, \Sigma_j)_{j=1}^N) := \bigcup_{j=1}^N \Big\{(z', z_j, z'') \in A'_j \times D_j \times A''_j : (z', z'') \notin \Sigma_j\Big\} \subset X.$$

Niech $\boldsymbol{c}(T) := T \cap (A_1 \times \dots \times A_N)$. oznacza *centrum* T.

W przypadku, gdy przestrzeń $\mathcal{O}(D_j)$ rozdziela punkty w D_j, niech $\widehat{D}_j$ będzie obwiednią holomorficzności D_j taką, że D_j jest podobszarem $\widehat{D}_j$, $j = 1, \dots, N$. W tej sytuacji definiujemy:

$$\widehat{X} = \widehat{\boldsymbol{X}}(A_1, \dots, A_N; D_1, \dots, D_N) = \widehat{\boldsymbol{X}}((A_j, D_j)_{j=1}^N) := \Big\{(z_1, \dots, z_N) \in \widehat{D}_1 \times \dots \times \widehat{D}_N : \sum_{j=1}^N \omega_{A_j, \widehat{D}_j}(z_j) < 1\Big\}.$$

Niech $M \subsetneq T$ będzie zbiorem takim, że dla dowolnych $j \in \{1, \dots, N\}$ $(a'_j, a''_j) \in (A'_j \times A''_j) \setminus \Sigma_j$, włókno $M_{(a'_j, \cdot, a''_j)} := \{z_j \in D_j : (a'_j, z_j, a''_j) \in M\}$ jest domknięte w D_j. Powiemy, że funkcja $f : T \setminus M \longrightarrow \mathbb{C}$ jest *oddzielnie holomorficzna* ($f \in \mathcal{O}_s(T \setminus M)$), jeżeli $f(a'_j, \cdot, a''_j) \in \mathcal{O}(D_j \setminus M_{(a'_j, \cdot, a''_j)})$ dla dowolnych $j \in \{1, \dots, N\}$ i $(a_j', a_j'') \in (A_j' \times A_j'') \setminus \Sigma_j$ takich, że $M_{(a_j', \cdot, a_j'')} \subsetneq D_j$.

Theorem (Zasadniczy wynik)**.** *Niech D_j będzie spójnym obszarem Riemanna nad $\mathbb{C}^{n_j}$ takim, że przestrzeń $\mathcal{O}(D_j)$ rozdziela punkty w D_j, niech $A_j \subset D_j$ będzie zbiorem lokalnie pluriregularnym i niech $\Sigma_j \subset A_j' \times A_j''$ będzie zbiorem pluripolarnym, $j = 1, \dots, N$. Połóżmy $X := \boldsymbol{X}((A_j, D_j)_{j=1}^N)$, $T := \boldsymbol{T}((A_j, D_j, \Sigma_j)_{j=1}^N)$. Niech $M \subset \boldsymbol{c}(T)$ będzie taki, że dla dowolnych $j \in \{1, \dots, N\}$ i $(a_j', a_j'') \in (A_j' \times A_j'') \setminus \Sigma_j$, włókno $M_{(a_j', \cdot, a_j'')}$ jest pluripolarne. Załóżmy, że dla dowolnych $j \in \{1, \dots, N\}$ i $(a_j', a_j'') \in (A_j' \times A_j'') \setminus \Sigma_j$, mamy dany domknięty zbiór pluripolarny $M(j, a_j', a_j'') \subset D_j$ taki, że:*

(a) *$M(j, a_j', a_j'') \cap A_j \subset M_{(a_j', \cdot, a_j'')}$.*

Niech $\mathcal{F}$ będzie pewną rodziną funkcji $f : \boldsymbol{c}(T) \setminus M \longrightarrow \mathbb{C}$ spełniającą następujące warunki:

(b) *dowolny punkt $a \in \boldsymbol{c}(T) \setminus M$ posiada otoczenie $U_a \subset D_1 \times \dots \times D_N$ takie, że dla dowolnego $f \in \mathcal{F}$ istnieje przedłużenie $f_a \in \mathcal{O}(U_a)$, dla którego $f_a = f$ na $U_a \cap (\boldsymbol{c}(T) \setminus M)$,*

(c) *dla dowolnych $f \in \mathcal{F}$, $j \in \{1, \dots, N\}$ i $(a_j', a_j'') \in (A_j' \times A_j'') \setminus \Sigma_j$, funkcja $f(a_j', \cdot, a_j'')$ rozszerza się holomorficznie do to $D_j \setminus M(j, a_j', a_j'')$.*

Wtedy istnieje relatywnie domknięty zbiór pluripolarny $\widehat{M} \subset \widehat{X}$ taki, że:

(d) *$\widehat{M} \cap \boldsymbol{c}(T) \subset M$,*

(e) *dla dowolnego $f \in \mathcal{F}$ istnieje przedłużenie $\widehat{f} \in \mathcal{O}(\widehat{X} \setminus \widehat{M})$, dla którego $\widehat{f} = f$ na $\boldsymbol{c}(T) \setminus M$,*

(f) *zbiór $\widehat{M}$ jest osobliwy ze względu na rodzinę $\{\widehat{f} : f \in \mathcal{F}\}$,*

(g) *jeżeli wszystkie zbiory $M(j, a_j', a_j'')$ są puste, to $\widehat{M} = \varnothing$,*

(h) *jeżeli wszystkie zbiory $M(j, a_j', a_j'')$ są cienkie, to $\widehat{M}$ jest analityczny.*