Regularyzacja funkcji plurisubharmonicznych na rozmaitościach

Zbigniew Błocki, 20,27 marca 2006

Rezultaty zostały otrzymane wspólnie z S. Kołodziejem. Głównym wynikiem jest elementarny dowód następującego twierdzenia

Twierdzenie 1. *Niech M będzie rozmaitością zespoloną z dodatnią formą hermitowską ω. Załóżmy, że γ jest ciągłą $(1,1)$-formą na M i niech $\varphi \in PSH(M,\gamma)$ będzie takie, że liczba Lelonga $\nu_\varphi(z) = 0$ dla dowolnego $z \in M$ (czyli np. gdy φ jest lokalnie ograniczona). Wtedy dla każdego otwartego podzbioru $M' \Subset M$ znajdziemy ciąg $\varepsilon_j \downarrow 0$ oraz $\varphi_j \in PSH(M', \gamma + \varepsilon_j\omega) \cap C^\infty(M')$ malejące do φ w M'.*

Twierdzenie to wynika z bardziej ogólnych (i trudniejszych) rezultatów Demailly'ego dotyczących aproksymacji funkcji plurisubharmonicznych. Nasz dowód jest jednak całkowicie elementarny, głównym krokiem jest następujący lemat.

Lemat. *Załóżmy, że $U, V \subset \mathbb{C}^n$ są zbiorami otwartymi i niech $F : U \to V$ bądzie odwzorowaniem biholomorficznym. Załóżmy, że $u \in PSH(U)$ jest takie, że $\nu_u(z) = 0$ dla $z \in U$. Połóżmy $u_\delta^F := (u \circ F^{-1})_\delta \circ F$, gdzie $u_\delta = u * \rho_\delta$ oznacza standardową regularyzację funkcji plurisubharmonicznych. Wtedy $u_\delta - u_\delta^F$ zmierza lokalnie jednostajnie do 0, gdy $\delta \to 0$.*

Założenie o liczbach Lelonga jest konieczne.

Z Twierdzenia 1 bardzo łatwo wynika następujący wynik dotyczący aproksymacji funkcji plurisubharmonicznych na zwartych rozmaitościach kählerowskich.

Twierdzenie 2. *Niech ω będzie formą kählerowską na zwartej rozmaitości zespolonej M. Wtedy dla $\varphi \in PSH(M,\omega)$ istnieje ciąg $\varphi_j \in PSH(M,\omega) \cap C^\infty(M)$ malejący do φ.*