Przykład dotyczący metryki Bergmana

Zbigniew Błocki, 10.12.2007

Celem wykładu było pokazanie w elementarny sposób (zostało to niedawno udowodnione przez Bo-Yong Chena w znacznie bardziej skomplikowany sposób), że metryka Bergmana obszaru $\Omega := \Delta^2 \setminus \overline{\Delta}_r^2$, $0 < r < 1$, nie jest niezmiennicza względem automorfizmów Δ^2. Mamy

$$K_\Omega(z) = \sum_{j,k\geq 0} \frac{(j+1)(k+1)}{\pi^2(1-r^{2(j+k)+4})} |z_1|^{2j}|z_2|^{2k}, \quad z \in D_r,$$

i funkcja ta przedłuża się do gładkiej funkcji w Δ^2. Połóżmy

$$K(\zeta) := \pi^2 K_\Omega(\zeta, 0) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j+1}{1-r^{2j+4}} |\zeta|^{2j}, \quad \zeta \in \Delta.$$

Gdyby K_Ω było niezmiennicze względem automorfizmów Δ^2, to dla $a \in \Delta$ i

$$F(\zeta) := \frac{a-\zeta}{1-\bar{a}\zeta}, \quad \zeta \in \Delta,$$

mielibyśmy

$$(\log K)_{\zeta\bar\zeta} = (\log K)_{\zeta\bar\zeta} \circ F\, |F'|^2.$$

Wynikałoby stąd, że

$$(\log K)_{\zeta\bar\zeta}(\zeta) = \frac{(\log K)_{\zeta\bar\zeta}(0)}{(1-|\zeta|^2)^2},$$

a więc

$$(\log(\log K)_{\zeta\bar\zeta})_{\zeta\bar\zeta}(0) = 2.$$

Jednak

$$K(0) = \frac{1}{1-r^4}, \qquad K_{\zeta\bar\zeta}(0) = \frac{2}{1-r^6}, \qquad K_{\zeta\bar\zeta\zeta\bar\zeta}(0) = \frac{12}{1-r^8},$$

(a tylko te pochodne nie znikają w 0). Dlatego też w 0 otrzymamy

$$(\log(\log K)_{\zeta\bar\zeta})_{\zeta\bar\zeta} = \frac{(\log K)_{\zeta\bar\zeta\zeta\bar\zeta}}{(\log K)_{\zeta\bar\zeta}} = \frac{K\, K_{\zeta\bar\zeta\zeta\bar\zeta} - 2K_{\zeta\bar\zeta}^2}{K\, K_{\zeta\bar\zeta}} = 6\frac{1-r^6}{1-r^8} - 4\frac{1-r^4}{1-r^6} \neq 2.$$