Lokalna regularność zespolonego operatora Monge'a-Ampère'a

Zbigniew Błocki, 17.12.2007

Dla $u \in PSH \cap W^{2,n}_{loc}$ przez $M_c u := \det(u_{j\bar{k}})$ oznaczamy zespolony operator Monge'a-Ampère'a. Następujący przykład, będący modyfikacją przykładu Pogorełowa [P], pokazuje, że z tego, że $M_c u \in C^\infty$, $M_c u >$ nie wynika, że $u \in C^\infty$:

Przykład. Dla $\beta \geq 0$ niech $u := (1 + |z_1|^2)|z'|^{2\beta}$, gdzie $z' = (z_2, \dots, z_n)$. Wtedy $M_c u = \beta^n (1 + |z_1|^2)^{n-2} |z'|^{2(\beta n - n + 1)}$. Dla $\beta = (n-1)/n$ mamy $M_c u \in C^\infty$, $M_c u > 0$, ale

$$u \in W^{2,p}_{loc} \ \Leftrightarrow \ p < n(n-1). \tag{1}$$

Z drugiej strony, w [B], korzystjąc głównie z pracy Trudingera [T2], pokazano następującą regularność

$$u \in W^{2,p}_{loc} \text{ dla pewnego } p > 2n(n-1), \ M_c u \in C^\infty, \ M_c u > 0 \ \Rightarrow \ u \in C^\infty. \tag{2}$$

Pozostaje więc pytanie, czy w (2) warunek $p > 2n(n-1)$ można zastąpić warunkiem $p > n(n-1)$? Odpowiedź byłany pozytywna, gdyby następujące oszacowanie (które jest naszym głównym rezultatem) byłoby prawdziwe także dla funkcji klasy $W^{2,p}_{loc}$ (zamiast C^4).

Twierdzenie. *Oznaczmy* $B_R = B(0,R)$ *i niech* $0 < r < R$. *Załóżmy, że* $u \in PSH \cap C^4(B_R)$, $\det(u_{j\bar{k}}) = \psi > 0$. *Wtedy dla* $p > n(n-1)$ *mamy*

$$\sup_{B_r} \Delta u \leq C(n, p, r, R, \inf_{B_R} \psi, ||\psi||_{C^{1,1}(B_R)}, ||\Delta u||_{L^p(B_R)}).$$

Głównymi narzędziami w dowodzie była metoda podobna do przedstawionej w pracy Trudingera [T1] oraz oszacowanie Kołodzieja [K].

[B] Z. Błocki, *On the regularity of the complex Monge-Ampère operator*, Proc. Conf. *Complex Geometric Analysis in Pohang*, 1997, Cont. Math. 222, pp. 181-189, American Mathematical Society, 1999.

[K] S. Kołodziej, *Some sufficient conditions for solvability of the Dirichlet problem for the complex Monge-Ampère operator*, Ann. Pol. Math. 65 (1996), 11-21.

[P] A.V. Pogorelov, *The Dirichlet problem for the multidimensional analogue of the Monge-Ampère equation*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 201 (1971), 790-793.

[T1] N.S. Trudinger, *Local estimates for subsolutions and supersolutions of general second order elliptic quasilinear equations*, Invent. Math. 61 (1980), 67-79.

[T2] N.S. Trudinger, *Regularity of solutions of fully nonlinear elliptic equations*, Boll. Un. Mat. Ital. A (6) 3 (1984), 421-430.