Sławomir Dinew

Jedyność operatora Monge'a-Ampère'a na rozmaitościach kählerowskich

6 października 2008

Celem referatu było omówienie pewnego wyniku dotyczącego operatora Monge'a-Ampère'a działającego na funckjach zdefiniowanych na zwartej rozmaitości kählerowskiej.

Niech X będzie zwartą rozmaitością zespoloną (tzn. mapy przejścia są holomorficzne). Forma różniczkowa ω jest typu $(1,1)$ jeżeli w lokalnych współrzędnych można ją zapisać jako

$$\omega = i \sum_{k,j=1}^{n} g_{k\bar{j}} dz_k \wedge d\bar{z}_j,$$

gdzie n jest wymiarem rozmaitości a $g_{k\bar{j}}$ są pewnymi funkcjami. Forme taką nazywamy dodatnio określoną (oznczamy to $\omega > 0$) jeżeli macierz $(g_{k\bar{j}})_{k,j}$ jest (punktowo) dodatnio określona.

Formę ω nazywamy formą kählerowską, jeżeli $\omega > 0$ oraz $d\omega = 0$ gdzie d jest operatorem różniczki zewnętrznej. Rozmaitość zespolona na której istnieje forma kählerowska nazywamy rozmaitością kählerowską.

Operator Monge'a-Ampère'a definiujemy gdla gładkiej funkcji u jako

$$(\omega + dd^c u) \wedge \cdots \wedge (\omega + dd^c u),$$

(iloczyn zewnętrzny bierzemy o krotności równej wymiarowi przestrzeni a operator d^c z definicji równa się $i/(2\pi)(\bar{\partial} - \partial)$). Dzięki wynikom Bedforda i Taylora wiadomo, że operator ten można poprawnie dookreślić dla ograniczonych funkcji ω-plurisubharmonicznych (czyli funkcji u, które są półciągłe z góry i forma $\omega + dd^c u$ jest nieujemna w sensie dystrybucyjnym). Wiadomo również, że w przypadku nieogranicznonych funkcji ω-plurisubharmonicznych operator tego nie da sie zawsze zdefiniować. Dlatego też Guedj i Zeriahi (wzorując się na wynikach Cegrella) zdefiniowali klasę

$$\mathcal{E}(X, \omega) := \{u \in \omega - psh | \lim_{j \to \infty} \int_{u > -j} (\omega + dd^c max(u - j))^n = \int_X \omega^n\}$$

oraz miarę Monge'a-Ampère'a jako

$$(\omega + dd^c u)^n = \lim_{j \to \infty} \chi_{(u > -j)} (\omega + dd^c max(u - j))^n.$$

Podstawowym problemem rozważanym w referacie było pytanie czy jezeli $u, v \in \mathcal{E}(X, \omega)$ spełniaja równość

$$(\omega + dd^c u)^n = (\omega + dd^c v)^n,$$

to czy stąd wynika, że $u - v = const$? Problem ten nosi nazwę problemu jedyności operatora Monge'a-Ampère'a.

W pierwszej części referatu zostały podane wszystkie potrzeben definicje oraz omówiona została geneza i historia problemu. Zostały omówione pracę Calabiego (który rozwiązał ten problem przy założeniu że u, v są gładkie oraz $\omega + dd^c u > 0$, $\omega + dd^c v > 0$), Bedforda i Taylora (którzy wykazali że różnica jest stała o ile u, v są ograniczone a rozważana rozmaitość to zespolona przestrzeń rzutowa) oraz Kołodzieja i Błockiego które ostatecznie pokazały jedyność dla ograniczonych u, v.

W drugiej części pokazałem dowód jedyności w ogónej sytuacji. W dowodzie korzystałem z innych niż tradycyjne metody, opierające sie na oszacowaniu a priori L^2 normy gradientu różnicy $u - v$. Główna ideą dowodu (zakładając nie wprost że różnica nie jest stała) jest wykazanie, że cała miara Monge'a-Ampère'a skupia się na dokładnie jednej poziomicy

$$A_t := \{u - v = t\},$$

a następnie iterując rozumowanie wykazanie że to samo powinno zachodzić dla miary Lebesgue'a ω^n. Dostajemy w ten sposób sprzeczność z faktem, że zbiory otwarte w tzw. *topologii pluricienkiej* muszą mieć dodatnią miarę Lebesgue'a.

Sam dowód opiera się na dwóch podstawowych wynikach. Pierwszym z nich jest nierówność dla mieszanych miar Monge'a-Ampère'a mówiąca, że o ile dla jakichś funkcji ω-plurisubharmonicznych $u,\ v$, miary Borelowskiej μ zerującej się na zbiorach pluripolarnych oraz $f,\ g \in L^1(d\mu)$ zachodzi

- $(\omega + dd^c u)^n \geq f d\mu$,
- $(\omega + dd^c v)^n \geq g d\mu$

to dla każdego $k = 0, \cdots, n$ prawdziwa jest nierówność

$$(\omega + dd^c u)^k \wedge (\omega + dd^c v)^{n-k} \geq f^{k/n} g^{(n-k)/n} d\mu.$$

Drugim twierdzeniem jest częściowa zasad porównawcza mówiąca że dla dowolnego $k = 1, \cdots, n$ oraz dowolnych $u,\ v,\ \phi_1, \cdots, \phi_{n-k} \in \mathcal{E}(X, \omega)$ jeżeli $T := (\omega + dd^c \phi_1) \wedge \cdots \wedge (\omega + dd^c \phi_k)$ to zachodzi nierówność

$$\int_{(u<v)} (\omega + dd^c v)^k \wedge T \leq \int_{(u<v)} (\omega + dd^c v)^k \wedge T.$$

Na zakończenie referatu zostały wskazane pewne zastosowania tego wyniku dotyczące stabilności rozwiązań oraz pewne nowe otwarte problemy.