Oszacowania a priori związane z twierdzeniem Calabiego-Yau

Zbigniew Błocki, 13.10.2008, 20.10.2008

Niech (M,ω) będzie zwartą rozmaitością kählerowską wymiaru n, zaś φ dopuszczalnym (tj. $\omega + dd^c\varphi > 0$) rozwiązaniem równania

$$(\omega + dd^c\varphi)^n = f\omega^n. \tag{1}$$

Dowodzimy dwa następujące oszacowania a priori.

Twierdzenie 1. *Dla dopuszczalnego rozwiązania $\varphi \in C^3(M)$ równania (1)*

$$|\nabla\varphi| \le C,$$

gdzie $C > 0$ jest stałą zależną tylko od oszacowań górnych na $\operatorname{osc}\varphi := \sup_M \varphi - \inf_M \varphi$, f, $|\nabla(f^{1/n})|$ i n, oraz od dolnego (ujemnego) oszacowania na krzywiznę bisekcyjną M.

Twierdzenie 2. *Dla $\varphi \in C^4(M)$, dopuszczalnego rozwiązania równania (1),*

$$\Delta\varphi \le C,$$

gdzie $C > 0$ jest stałązależną tylko od oszacowań górnych na $\operatorname{osc}\varphi$, f, krzywiznę skalarną M i n, oraz oszacowań dolnych na $f^{1/(n-1)}\Delta(\log f)$ i krzywiznę bisekcyjną M.

Oszacowanie na gradient jest nowe (wcześniej zostało udowodnione w [B] tylko w przypadku rozmaitości o nieujemnej krzywiźnie bisekcyjnej), natomiast Twierdzenie 2 jest wzmocnieniem oszacowań z prac [A], [Y] i [B]. Co ciekawe, dowód Twierdzenia 1 jest bardziej skomplikowany od dowodu Twierdzenia 2.

[A] T. Aubin, *Equations du type de Monge-Ampère sur les variétés Kähleriennes compactes*, C.R. Acad. Sci. Paris 283 (1976), 119-121.

[B] Z. Błocki, *Regularity of the degenerate Monge-Ampère equation on compact Kähler manifolds*, Math. Z. 244 (2003), 153-161.

[Y] S.-T. Yau, *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation, I, Comm. Pure Appl. Math. 31 (1978), 339-411.*