Uwaga o maksymalnych funkcjach plurisubharmonicznych

Zbigniew Błocki, 24.11.2008

Funkcję plurisubharmoniczną (psh) w obszarze $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ nazywamy *maksymalną*, jeżeli dla $v \in PSH(\Omega)$ takiej, że $v \leq u$ w $\Omega \setminus K$ dla pewnego $K \Subset \Omega$ mamy $v \leq u$ w Ω. Dla $n = 1$ maksymalne funkcje psh to dokładnie funkcje harmoniczne, natomiast z teorii Bedforda i Taylora wynika, że jeżeli $u \in PSH \cap L^\infty_{loc}$, to u jest maksymalna wtedy i tylko wtedy, gdy $(dd^c u)^n = 0$. Wynika z tego w szczególności, że maksymalność jest własnością lokalną dla lokalnie ograniczonych funkcji psh. Naturalny jest, otwarty do tej pory, problem, czy jest tak dla dowolnych funkcji psh.

Krokiem w tym kierunku jest następujący rezultat ([S], [B]):

Twierdzenie. *Jeżeli $u_j \in PSH \cap L^\infty_{loc}$ jest ciągiem malejącym do $u \in PSH$ i $(dd^c u_j)^n$ dąży słabo do 0, to funkcja u jest maksymalna.*

Rezultat przeciwny jednak nie zachodzi: funkcja $u := \log |z_1 \dots z_n|$ jest maksymalna w $\mathbb{C}^n$ dla $n \geq 2$, ale dla jej standardowych regularyzacji $u_j := u * \rho_{1/j}$ miary $(dd^c u_j)^n$ nie są zbieżne do 0.

Jedną z hipotez, której pozytywne rozwiązanie implikowałoby lokalną własność maksymalności (w świetle Twierdzenia), była następująca: jeżeli u jest maksymalna, to $(dd^c \max\{u, -j\})^n$ dąży słabo do 0. Pokazujemy jednak, że ta hipoteza nie jest prawdziwa: funkcja

$$u = -\sqrt{\log |z| \log |w|}$$

jest psh w bidysku Δ^2, maksymalna w $(\Delta^2)_*$ (ale nie w Δ^2), ale $(dd^c \max\{u, -j\})^2$ dąży do miary μ, skoncentrowanej na $(\Delta \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \Delta)$, która np. na $\Delta \times \{0\}$ jest dana przez

$$\frac{\pi}{-|z|^2 \log |z|} d\lambda.$$

[B] Z. Błocki, *Estimates for the complex Monge-Ampère operator*, Bull. Pol. Acad. Sci. 41 (1993), 151-157.

[S] A. Sadullaev, *Plurisubharmonic measures and capacities on complex manifolds*, Russian Math. Surveys 36 (1981), 61-119.