Przestrzeń metryk kählerowskich

Zbigniew Błocki, 12.01.2009, 19.01.2009

Dla zwartej rozmaitości kählerowskiej (M,ω) wymiaru n rozważamy przestrzeń potencjałów

$$\mathcal{H} := \{\varphi \in C^\infty(M) : \omega_\varphi := \omega + dd^c\varphi > 0\}.$$

Traktując $\mathcal{H}$ jako otwarty podzbiór $C^\infty(M)$ (z topologią zbieżności jednostajnej wszystkich pochodnych cząstkowych i strukturą różniczkową zdefiniowaną przez $C^\infty(U, C^\infty(M)) := C^\infty(M \times U)$ dla $U \subset \mathbb{R}^m$), przestrzeń styczną $T\varphi\mathcal{H}$ dla $\varphi \in \mathcal{H}$ możemy identyfikować z $C^\infty(M)$. Mabuchi [M] wprowadził na $\mathcal{H}$ strukturę riemannowską:

$$\langle\psi, \eta\rangle := \int_M \psi\eta\omega_\varphi^n, \quad \psi, \eta \in T\varphi\mathcal{H}.$$

Definiujemy teraz długość krzywej oraz odległość d w standardowy sposób jak w geometrii riemannowskiej. Głównym celem wykładu było wykazanie, że $(\mathcal{H}, d)$ jest przestrzenią metryczną. Rezultat ten jest dowodzony w pracy [C], jednak, moim zdaniem, dowód ten zawierał kilka istotnych luk.

Głównym narzędziem w dowodzie tego rezultatu jest równanie Monge'a-Ampère'a z następującego powodu: można pokazać, że krzywa $\varphi \in C^\infty([a,b], \mathcal{H})$ jest geodezyjną, jeżeli

$$\ddot{\varphi} - |\nabla\dot{\varphi}|^2 = 0,$$

gdzie $\dot{\varphi} = d\varphi/dt$, zaś ∇ oraz $|\cdot|$ są brane względem metryki $\omega_{\varphi(\cdot,t)}$. To zaś równanie, jak zauważyli niezależnie Semmes [S] i Donaldson [D], jest równoważne jednorodnemu zespolonemu równaniu Monge'a-Ampère'a

$$(\omega + dd^c\varphi)^{n+1} = 0,$$

po zmianie zmiennych $t = \log|\zeta|$, $\zeta \in \mathbb{C}_*$ (wtedy φ jest funkcją określoną na zwartej rozmaitości kählerowskiej z brzegiem gładkim $M \times \{e^a \le |\zeta| \le e^b\}$).

[C] X.X. Chen, *The space of Kähler metrics*, J. Diff. Geom. 56 (2000), 189-234.

[D] S.K. Donaldson, *Symmetric spaces, Kähler geometry and Hamiltonian dynamics*, Northern California Symplectic Geometry Seminar, 13-33, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 196, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[M] T. Mabuchi, *Some symplectic geometry on compact Kḧler manifolds. I,* Osaka J. Math. 24 (1987), 227-252.

[S] S. Semmes, *Complex Monge-Ampeȑe and symplectic manifolds*, Amer. J. Math. 114 (1992), 495-550.