Pewne własności obszarów $\mathbb{C}$-wypukłych

Referat na podstawie pracy Nikolai Nikolova i Alberto Saracco "Hyperbolicity of $\mathbb{C}$-convex domains", *Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences*, t. 60, No 9, 2007.

Celem pracy jest wykazanie następującego twierdzenia, będącego uogólnieniem pewnych własności obszarów wypukłych na $\mathbb{C}$-wypukłe (przypomnijmy, że obszar $D \subset \mathbb{C}^N$ nazywamy $\mathbb{C}$-wypukłym, jeżeli każde niepuste przecięcie D z prostą zespoloną jest ściągalne do punktu).

Twierdzenie. *Jeżeli $D \subset \mathbb{C}^N$ jest obszarem $\mathbb{C}$-wypukłym, to następujące warunki są równoważne:*

(1) *D jest biholomorficzny z obszarem ograniczonym*
(2) *D jest c-zupełny, gdzie c oznacza pseudoodległość Carathéodory'ego*
(3) *D jest k-zupełny, gdzie k oznacza pseudoodległość Kobayashiego*
(4) *D jest k-hiperboliczny*
(5) *D jest słabo β-zupełny, gdzie β oznacza metrykę Bergmana*
(6) *D jest typu taut*
(7) *D jest hiperwypukły*
(8) *każda funkcja holomorficzna $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D)$ jest stała*
(9) *D nie zawiera prostych zespolonych*

Ponadto, jeżeli D jest nieograniczony, powyższe warunki są równoważne następującym:

(10) *D ma barierę w ∞, tzn. $\exists\ \varphi \in PSH^-(D): \ \limsup_{z\to a} \varphi(z) < 0 = \lim_{z\to\infty} \varphi(z)$, gdzie $a \in \overline{D}$*
(11) *$\exists\ \psi \in PSH^-(D): \ \liminf_{z\to a} \psi(z) > -\infty = \lim_{z\to\infty} \psi(z)$, gdzie $a \in \overline{D}$*

Większość implikacji potrzebnych w dowodzie twierdzenia ((i)⇒(1), $2 \leqslant i \leqslant 11$, (1)⇒(2), (1)⇒(10), (1)⇒(11)) wynika z poniższych propozycji:

Propozycja 1 (N. Nikolov, P. Pflug, W. Zwonek)**.** *Jeżeli $D \subset \mathbb{C}^N$, $D \neq \mathbb{C}^N$ jest obszarem $\mathbb{C}$-wypukłym, to istnieje dokładnie jedno $1 \leqslant k \leqslant N$ oraz dokładnie jedno $D' \subset \mathbb{C}^k$ takie, że D' nie zawiera prostych zespolonych oraz $D = D' \times \mathbb{C}^{N-k}$. Ponadto D' jest biholomorficzny z obszarem ogaraniczonym i jest c-skończenie zwarty.*

Propozycja 2 (N. Nikolov, P. Pflug, W. Zwonek)**.** *Jeżeli $D \subset \mathbb{C}^N$ jest obszarem $\mathbb{C}$-wypukłym biholomorficznym z obszarem ograniczonym, to $D \subset D_1 \times \ldots \times D_N$, gdzie każdy D_j, $j = 1, \ldots, N$ jest biholomorficzny z $\mathbb{D}$.*

Pozostałe implikacje ((2)⇒(3)⇒(4)⇒(8)⇒(9), (7)⇒(6), (7)⇒(5)) są znanymi własnościami obszarów w $\mathbb{C}^N$, niekoniecznie $\mathbb{C}$-wypukłych.