PSEUDOMETRYKI KOBAYASHIEGO WYŻSZYCH RZĘDÓW

Celem referatu jest wprowadzenie pseudometryk Kobayashiego wyższych rzędów i przybliżenie zestawu podstawowych twierdzeń, które dla nich zachodzą.

Definicja 1. Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem. Dla $t \in D$, przez $\mathcal{O}_t(\mathbb{D}, D)$ oznaczmy zbiór $\mathcal{O}(\mathbb{D}, D) \cap \{\varphi : \varphi(0) = t\}$, gdzie $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ jest dyskiem jednostkowym.
Dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ zdefiniujmy *pseudometrykę Kobayashiego rzędu m*

(1) $\varkappa_D^m(z, X) := \inf\{|\alpha|^{-1} :$ istnieje $\varphi \in \mathcal{O}_z(\mathbb{D}, D)$ t. że $\nu(\varphi) \geqslant m, \varphi^{(m)}(0) = m!\alpha X\}$,

gdzie $(z, X) \in D \times \mathbb{C}^n$, a $\nu(\varphi)$ oznacza rząd znikania $\varphi - \varphi(0)$ w 0.

Zauważmy, że $\varkappa_D^1(z, X)$ jest „zwykłą” pseudometryką Kobayashiego-Roydena $\varkappa_D(z, X)$.

Definicja 2. Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem. Zdefiniujmy *singularną pseudometrykę Kobayashiego*

$$\varkappa_D^\infty(z, X) := \inf_{m \in \mathbb{N}} \varkappa_D^m(z, X) \quad \text{dla } (z, X) \in D \times \mathbb{C}^n. \tag{2}$$

Zestaw twierdzeń dla pseudometryk Kobayashiego wyższych rzędów i singularnej pseudometryki Kobayashiego:

Twierdzenie 3. *$(\varkappa_D^\infty)_D, (\varkappa_D^m)_D$ mają własność holomorficznej kontraktywności.*

Twierdzenie 4. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem i niech $m \in \mathbb{N}$. Wówczas:*
(1) $\varkappa_D^m, \varkappa_D^\infty$ są półciągłe z góry na $D \times \mathbb{C}^n$.
(2) $\varkappa_\mathbb{D}^m = \varkappa_\mathbb{D}^\infty = \varkappa_\mathbb{D}$
(3)$\gamma_D \leqslant \varkappa_D^\infty \leqslant \varkappa_D^m \leqslant \varkappa_D$, gdzie γ_D oznacza pseudometrykę Carathéodory'ego-Reiffena.
(4)$\varkappa_D^m(z, \lambda X) = |\lambda|\varkappa_D^m(z, X), \varkappa_D^\infty(z, \lambda X) = |\lambda|\varkappa_D^\infty(z, X)$ dla dowolnych $\lambda \in \mathbb{C}$ oraz $(z, X) \in D \times \mathbb{C}^n$.

Twierdzenie 5 (Własność produktowa)**.** *Dla dowolnych obszarów $D \subset \mathbb{C}^n, G \subset \mathbb{C}^k$, $(z, w) \in D \times G$, $(X, Y) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k$ zachodzą wzory:*

$$\varkappa_{D\times G}^m((z, w), (X, Y)) = \max\{\varkappa_D^m(z, X), \varkappa_G^m(w, Y)\} \quad \text{dla } m \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

$$\varkappa_{D\times G}^\infty((z, w), (X, Y)) = \max\{\varkappa_D^\infty(z, X), \varkappa_G^\infty(w, Y)\}. \tag{4}$$

Przykład 6.

$$\varkappa_{\mathbb{B}_n}^m(z, X) = \varkappa_{\mathbb{B}_n}^\infty(z, X) = \left(\frac{||X||^2}{1 - ||z||^2} + \frac{|< z, X >|^2}{(1 - ||z||^2)^2}\right)^{1/2}, \tag{5}$$

gdzie $\mathbb{B}_n \subset \mathbb{C}^n$ oznacza kulę jednostkową o środku w 0.

Twierdzenie 7. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem typu taut. Wówczas dla dowolnej pary $(z, X) \in D \times \mathbb{C}^n$ istnieje $\varphi \in \mathcal{O}_z(\mathbb{D}, D)$ t. że $\nu(\varphi) \geqslant m$ oraz $\varkappa_D^m(z, X)\varphi^{(m)}(0) = m!X$.*

Twierdzenie 8. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie zbalansowanym obszarem pseudowypukłym o funkcjonale Minkowskiego h. Wówczas*

$$h(X) = \varkappa_D^\infty(0, X) = \varkappa_D(0, X) \quad \text{dla } X \in \mathbb{C}^n. \tag{6}$$

Twierdzenie 9. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem ograniczonym. Wówczas istnieje stała $C > 0$ taka, że*

$$\varkappa_D^\infty(z, X) \geqslant C||X|| \quad \text{dla } (z, X) \in D \times \mathbb{C}^n. \tag{7}$$

Przykład 10.

$$\varkappa_{\mathbb{C}^n}^{\infty} = \varkappa_{\mathbb{C}^n} = 0. \tag{8}$$

Twierdzenie 11. *Niech $D, \tilde{D} \subset \mathbb{C}^n$ będą obszarami i niech $\pi : \tilde{D} \longrightarrow D$ będzie nakryciem holomorficznym. Wówczas dla dowolnego $(\tilde{z}, X) \in \tilde{D} \times \mathbb{C}^n$ i dla każdego $m \in \mathbb{N}$ mamy*

$$\varkappa_{\tilde{D}}^{m}(\tilde{z}, X) = \varkappa_{D}^{m}(\pi(\tilde{z}), \pi^{'}(\tilde{z})X). \tag{9}$$

Definicja 12. Dla obszaru $D \subset \mathbb{C}^n$ i krzywej $\alpha : [0,1] \longrightarrow D$ kawałkami klasy C^1 położmy:

$$L^m(\alpha) := \int_0^1 \varkappa_D^m(\alpha(t), \alpha^{'}(t))dt, m \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

$$L^{\infty}(\alpha) := \int_0^1 \varkappa_D^{\infty}(\alpha(t), \alpha^{'}(t))dt. \tag{11}$$

Zdefiniujmy:

$$d_D^m(z, w) := \inf_{\alpha} L^m(\alpha) \quad \text{dla } z, w \in D, \tag{12}$$

$$d_D^{\infty}(z, w) := \inf_{\alpha} L^{\infty}(\alpha) \quad \text{dla } z, w \in D. \tag{13}$$

Twierdzenie 13. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem. Wówczas d_D^m, d_D^{∞} są pseudoodległościami na D.*

Twierdzenie 14. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n, G \subset \mathbb{C}^k$ będą obszarami. Wówczas, dla dowolnego odwzorowania $F \in \mathcal{O}(G, D)$ mamy:*

$$d_G^m(z, w) \geqslant d_D^m(F(z), F(w)) \quad \textit{dla } z, w \in G, \tag{14}$$

$$d_G^{\infty}(z, w) \geqslant d_D^{\infty}(F(z), F(w)) \quad \textit{dla } z, w \in G. \tag{15}$$

Przykład 15.

$$d_{\mathbb{B}_n}^{\infty}(z, w) = d_{\mathbb{B}_n}(0, h_z(w)) = p(0, ||h_z(w)||), \tag{16}$$

gdzie $d_{\mathbb{B}_n}$ oznacza „zwykłą” pseudoodległość Kobayashiego, $p -$ odległość Poincarégo na $\mathbb{D}$ a $h_z -$ automorfizm $\mathbb{B}_n$ odwzorowujący z na 0.

Twierdzenie 16. *Niech $D, \tilde{D} \subset \mathbb{C}^n$ będą obszarami i niech $\pi : \tilde{D} \longrightarrow D$ będzie nakryciem holomorficznym. Wówczas dla dowolnych $z, w \in D$ i dla dowolnego $\tilde{z} \in \tilde{D}$ takiego, że $\pi(\tilde{z}) = z$ mamy:*

$$d_D^m(z, w) = \inf_{\tilde{w} \in \pi^{-1}(w)} d_D^m(\pi(\tilde{z}), \pi(\tilde{w})), \tag{17}$$

$$d_D^{\infty}(z, w) = \inf_{\tilde{w} \in \pi^{-1}(w)} d_D^{\infty}(\pi(\tilde{z}), \pi(\tilde{w})). \tag{18}$$