W referacie zostanie przedstawiony nowy dowód twierdzenia Carlemana o niesurjektywności odwzorowania Borela w przypadku quasianalitycznych pierścieni kiełków funkcji gładkich, zawierających kiełki funkcji nieanalitycznych, autorstwa V. Thillieza. Referat oparty został na artykule: V. Thilliez, "*On quasianalytic local rings*", Expo. Math. 26 (2008) 1-23. Poniżej znajdują się niezbędne oznaczenia i definicje.

$\mathcal{O}_n$ - pierścień kiełków funkcji analitycznych rzeczywistych (o wartościach zespolonych) w otoczeniu $0 \in \mathbb{R}^n$,

$\mathcal{E}_n$ - pierścień kiełków funkcji rzeczywistych klasy C^∞ (o wartościach zespolonych) w otoczeniu $0 \in \mathbb{R}^n$,

$\mathcal{F}_n$ - pierścień szeregów formalnych n zmiennych, o współczynnikach zespolonych.

Definicja 1. Odwzorowanie $T_0 : \mathcal{E}_n \longrightarrow \mathcal{F}_n$ określone wzorem:

$$T_0 f = \sum_{J \in \mathbb{N}^n} \frac{D^J f(0)}{J!} x^J,$$

nazywamy *odzworowaniem Borela.*

UWAGA: Odwzorowaniem Borela będziemy nazywać również restrykcje powyżej określonego odwzorowania do podzbiorów $\mathcal{E}_n$.

Niech $M = (M_j)_{j \geq 0}$ będzie rosnącym ciągiem liczb rzeczywistych, przy czym $M_0 = 1$. Przez $\mathcal{E}_n(M)$ będziemy oznaczać podzbiór $\mathcal{E}_n$ złożony z tych elementów f, dla których istnieje otoczenie U punktu $0 \in \mathbb{R}^n$ oraz stałe $C, \sigma > 0$ takie, że

$$|D^J f(x)| \leq C\sigma^j j! M_j \qquad \text{dla } J \in \mathbb{N}^n,\ x \in U \ (j = |J|).$$

Podobnie, przez $\mathcal{F}_n(M)$ będziemy oznaczać podzbiór $\mathcal{F}_n$ złożony z tych elementów $F = \sum_{J \in \mathbb{N}^n} F_J x^J$, dla których istnieją stałe $C, \sigma > 0$ takie, że

$$|F_J| \leq C\sigma^j M_j \qquad \text{dla } J \in \mathbb{N}^n.$$

Zachodzą oczywiście relacje: $\mathcal{O}_n \subseteq \mathcal{E}_n(M) \subseteq \mathcal{E}_n$ oraz $T_0\mathcal{E}_n(M) \subseteq \mathcal{F}_n(M)$.

W dalszych rozważaniach zakładamy, że ciąg M jest logarytmicznie wypukły, tzn. że ciąg M_{j+1}/M_j jest rosnący. Wówczas zachodzi

Propozycja 1. Zbiór $\mathcal{E}_n(M)$ jest pierścieniem lokalnym z ideałem maksymalnym $\underline{m}_M = \{h \in \mathcal{E}_n(M) : h(0) = 0\}$.

Również zbiór $\mathcal{F}_n(M)$ jest pierścieniem lokalnym. Prawdziwa jest

Propozycja 2. Równość $\mathcal{O}_n = \mathcal{E}_n(M)$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\sup_{j\geq 1}(M_j)^{1/j} < \infty$.

Jedną z podstawowych własności niektórych pierścieni $\mathcal{E}_n(M)$ jest ich quasianalityczność.

Definicja 2. Pierścień $\mathcal{E}_n(M)$ jest *quasianalityczny*, jeżeli dla dowolnego $f \in \mathcal{E}_n(M)$ zachodzi implikacja:

$$D^J f(0) = 0,\ J \in \mathbb{N}^n \quad \Longrightarrow \quad f = 0.$$

Oznacza to, że odwzorowanie Borela jest injektywne na $\mathcal{E}_n(M)$. Quasianalityczność pierścieni $\mathcal{E}_n(M)$ charakteryzuje tw. Denjoy-Carlemana:

Twierdzenie 1. Pierścień $\mathcal{E}_n(M)$ jest quasianalityczny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{M_j}{(j+1)M_{j+1}} = \infty.$$

Charakterystyczną cechą pierścieni $\mathcal{E}_n(M)$, zawierających kiełki funkcji gładkich nieanalitycznych, jest fakt wykluczania się injektywności i surjektywności odwzorowania Borela $T_0 : \mathcal{E}_n(M) \longrightarrow \mathcal{F}_n(M)$. Mówi o tym następujące twierdzenie Carlemana, do którego odnosi się tytuł referatu:

Twierdzenie 2. Załóżmy, że pierścień $\mathcal{E}_n(M)$ jest quasianalityczny i że $\mathcal{O}_n \subsetneq \mathcal{E}_n(M)$. Wtedy odwzorowanie $T_0 : \mathcal{E}_n(M) \longrightarrow \mathcal{F}_n(M)$ nie jest surjektywne.

(Surjektywność odwzorowania Borela $T_0 : \mathcal{E}_n(M) \longrightarrow \mathcal{F}_n(M)$ charakteryzuje twierdzenie Petzschego, przez tzw. warunek *silnej nie-quasianalityczności* pierścienia $\mathcal{E}_n(M)$.)

Carleman dowiódł powyższego twierdzenia używając rachunku wariacyjnego. W referacie zostanie przedstawiony dowód elementarny, przy użyciu technik związanych z przestrzeniami Hilberta.