O holomorficznej krzywiźnie sekcyjnej dla metryki Bergmana

(sprawozdanie z referatu Żywomira Dinewa, przedstawionego na seminarium z Analizy Zespolonej 20 kwietnia 2009 r.)

Holomorficzna krzywizna sekcyjna dla metryki Bergmana dla obszaru $U \subset \mathbb{C}^n$, w punkcie $z \in U$ i w kierunku $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ to z definicji:

$$R_U(z,X) := \left(\sum_{p,q=1}^{n} g_{p\overline{q}} X_p X_{\overline{q}} \right)^{-2} \sum_{i,j,k,l=1}^{n} R_{\overline{i}jk\overline{l}} \overline{X_i} X_j X_k \overline{X_l}, \tag{1}$$

tu

$$R_{\overline{i}jk\overline{l}} := -\frac{\partial^2 g_{j\overline{i}}}{\partial z_k \partial \overline{z}_l} + \sum_{r,s=1}^{n} g^{\overline{r}s} \frac{\partial g_{j\overline{r}}}{\partial z_k} \frac{\partial g_{s\overline{i}}}{\partial \overline{z}_l},$$

gdzie $g^{\overline{r}s}$ oznacza r,s-ty element macierzy odwrotnej do $g_{p\overline{q}}$, a $g_{p\overline{q}}$ oznacza $\frac{\partial^2}{\partial z_p \partial \overline{z}_q} \log \mathrm{K}_U(z,z)$, gdzie $\mathrm{K}_U(z,z)$ jest jądrem Bergmana (na przekątnej) obszaru U.

Alternatywnie można zdefiniować ją tak:

$$R_U(z,X) := 2 - \frac{J_{1,U}(z;X)^2}{J_{0,U}(z;X) J_{2,U}(z;X)}, \tag{2}$$

$$J_{0,U}(z) := sup\{|f(z)|^2 : f(z) \in \mathcal{O}(U) \cap L^2(U), \int_U |f|^2 \leqslant 1\} \tag{3}$$

$$J_{1,U}(z;X) := sup\Big\{\Big| \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(z)}{\partial z_j} X_j \Big|^2 : f(z) \in \mathcal{O}(U) \cap L^2(U), \int_U |f|^2 \leqslant 1, f(z) = 0\Big\} \tag{4}$$

$$J_{2,U}(z;X) := sup\Big\{\Big| \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_j \partial z_i} X_j X_i \Big|^2 : f(z) \in \mathcal{O}(U) \cap L^2(U), \int_U |f|^2 \leqslant 1, f(z) = 0, \frac{\partial f(z)}{\partial z_j} = 0, j = 1..n\Big\} \tag{5}$$

Łatwo zauważyć, że $J_{0,U}(z) = \mathrm{K}_U(z,z)$ jest jądrem Bergmana i że

$$\left| \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \log \mathrm{K}_U(z,z)}{\partial z_j \partial \bar{z}_i} X_j \bar{X}_i \right|^2 = \frac{J_{1,U}(z;X)}{J_{0,U}(z)}$$

jest metryką Bergmana w kierunku X. Ponadto holomorficzna krzywizna sekcyjna dla metryki Bergmana jest niezmiennicza względem owdzorowań biholomorficznych.

Referat składa się z dwóch części:

W pierwszej przedstrawiono w zarysie badanie zachowania holomorficznej krzywizny sekcyjnej dla metryki Bergmana dla pierścienia kołowego

$$\{r < |z| < 1\}.$$

W szczególności przedstawiono szkic dowodu następującego faktu

$$\lim_{r\to 0} R_{P_r}(\sqrt{r}) = -\infty$$

oraz

$$\lim_{r\to 0} R_{P_r}(r^{\frac{3}{10}}) = 2$$

W drugiej części podano przykład ograniczonego obszaru na płaszczyźnie Ω z punktem $\zeta \in \partial\Omega$ takiego, że

$$\limsup_{\Omega\ni z\to\zeta} R_\Omega(z) = 2$$

i

$$\liminf_{\Omega\ni z\to\zeta} R_\Omega(z) = -\infty.$$

Przykład ten konstruuje się poprzez "klejenie" pierścieni o coraz mniejszych średnicach zewnętrznych i jeszcze szybciej malejących promieniach wewnętrznych. Idea konstrukcji jest taka, że krzywiznę obszaru można oszacować przy pomocy krzywizny j-tego "składowego" pierścienia dla punktów leżących wewnątrz tego pierścienia. Przy tych oszacowaniach potrzebujemy istotnie dwóch rzeczy:

Aby "przejścia" między sąsiednimi pierścieniami były bardzo wąskie (w kontrolowany sposób), oraz twierdzenia Donnellego-Feffermana o rozwiązaniu problemu $\bar{\partial}$.