Izometrie dla metryki Caratheodory'ego

(na podstawie pracy Marco Abate i Jean Pierre Vigué'a)

Podczas referatu wprowadzimy definicję własności (V) dla pary zespolonych przestrzeni Banacha, a także udowadnimy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1. *Niech $(E_1, \|\cdot\|_j)$ będą zespolonymi przestrzeniami Banacha, a $B_j = \{x \in E_j : \|x\|_j \leq 1\}$. Niech $f\colon B_1 \to B_2$ będzie odwzorowaniem holomorficznym takim, że $f(0) = 0$ oraz $\|f'(0)(X)\|_2 = \|X\|_1$ dla każdego $X \in E_1$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) E_2 da się przedstawić w postaci $E_2 = f'(0)(E_1) \oplus F$ tak, że projekcja $\pi\colon E_2 \to f'(0)(E_1)$ ma normę 1,

(ii) $f(B_1)$ jest rozmaitością zawartą w B_2, f jest biholomorfizmem oraz istnieje holomorficzna retrakcja z B_2 na $f(B_1)$.

Definicja 1. Para (E_1, E_2) przestrzeni Banacha ma własność (V), gdy dla każdej liniowej izometrii $L\colon E_1 \to E_2$ istnieje podprzestrzeń F taka, że $E_2 = L(E_1) \oplus F$ oraz projekcja $\pi\colon E_2 \to L(E_1)$ ma normę 1.

Przykład 1. Następujące pary przestrzeni Banacha mają własność (V):

1. $(c_0(I), c_0(J))$,
2. $(l^\infty(I), E_2)$.

Przykład 2. Przestrzeń $c_0(\mathbb{N})$ nie jest uzupełnialna w $l^\infty(\mathbb{N})$, więc para $(c_0(\mathbb{N}), l^\infty(\mathbb{N}))$ nie ma własności (V).

Poniższy przykład pokazuje, że nawet para skończenie wymiarowych przestrzeni Banacha nie musi mieć własności (V).

Przykład 3. Niech $E_2 = (\mathbb{C}^3, \|\cdot\|_\infty)$ oraz $L\colon \mathbb{C}^2 \to E_2$ będzie takie, że $L(x,y) = (x, y, x+y)$. Zdefiniujmy $\|x\|_{\mathbb{C}^2} = \|L(x)\|_{E_2}$. Wtedy para $((\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_{\mathbb{C}^2}), E_2)$ nie ma własności (V).