Asymptotyczne zachowanie metryki Kobayashiego w obszarach wypukłych

Dla obszaru $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, punktu $P \in \Omega$ i wektora $\xi \in \mathbb{C}^n$ definiujemy metryki Kobayashiego, Carathéodory'ego i Sibony'ego następująco:

$$F_K^\Omega(P,\xi) = \inf\{\alpha > 0 : \exists \phi \in \mathcal{O}(\mathbb{D},\Omega) : \phi(0) = P, \phi'(0) = \xi/\alpha\},$$
$$F_C^\Omega(P,\xi) = \sup\{|\sum_{j=1}^n \frac{\partial f(P)}{\partial z_j}| : f \in \mathcal{O}(\Omega,\mathbb{D}) : f(P) = 0\},$$

$$F_S^\Omega(P,\xi) = \sup\{\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(P)\xi_j\overline{\xi}_k : 0 \leqslant u \leqslant 1,\ u \text{ - } \mathcal{C}^2 \text{ w otoczeniu } P,\ u(P) = 0,\ \log u \in \mathcal{PSH}(\Omega)\}.$$

Metryki te pokrywają się na dysku z metryką Poincarégo

$$P^{\mathbb{D}}(z,\xi) = \frac{|\xi|^2}{1-|z|^2}$$

oraz są nierosnące względem odwzorowań holomorficznych, więc na mocy twierdzenia Lemperta są one równe na obszarach wypukłych. Ich wspólną wartość oznaczmy $F^\Omega(P,\xi)$.

Załóżmy, że Ω jest wypukły i ograniczony z funkcją definiującą ρ klasy $\mathcal{C}^\infty$ a ponadto

$$P \in \partial\Omega,\ v = \frac{\nabla\rho(P)}{\|\nabla\rho(P)\|},\ \xi \in T_P^{\mathbb{C}}(\partial\Omega),\ P_\delta = P - \delta v.$$

Zdefniujmy krotność zera funkcji ρ w punkcie P i kierunku ξ jako ∞ albo liczbę naturalną m spełniającą

$$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(m-1)}(0) = 0,\ f^{(m)}(0) \neq 0$$

w sensie różniczkowania rzeczywistego, gdzie

$$f(z) = \rho(P + \xi z)\ ,\ z \in \mathbb{C}.$$

Przy tych oznaczeniach zachodzą następujące twierdzenia:

Twierdzenie 1. *Jeśli $m \geqslant 3$ jest skończone to*

$$F^\Omega(P_\delta,\xi) \gtrsim \frac{|\xi|}{\delta^{1/m}}$$

oraz

$$F^\Omega(P_\delta,v) \gtrsim \frac{1}{\delta}$$

dla dostatecznie małych $\delta > 0$.

Twierdzenie 2. *Dla $T \in T_P(\partial\Omega)$, liczb zespolonych a, b oraz dostatecznie małych $\delta > 0$ zachodzi oszacowanie*

$$F^\Omega(P_\delta, av + bT) \geqslant \frac{|a|}{6\delta}.$$