Dyski o brzegach w rozmaitościach całkowicie rzeczywistych

Definicja 1. *Niech* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}^n$.
Mówimy, że f *jest dyskiem analitycznym, jeżeli* f *jest holomorficzne oraz dla każdego* $k \geq 0$: $f^{(k)}$ *uciągla się na* $\overline{\mathbb{D}}$. *Mówimy, że brzeg takiego dysku leży w zbiorze* X*, jeżeli* $f(\partial\mathbb{D}) \subset X$.
Mówimy, że f *jest prawie gładkim dyskiem analitycznym, jeżeli* f *jest holomorficzne oraz istnieje* $\lambda_0 \in \partial\mathbb{D}$ *takie, że dla każdego* $k \geq 0$: $f^{(k)}$ *uciągla się na* $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{\lambda_0\}$. *Mówimy, że brzeg takiego dysku leży w zbiorze* X*, jeżeli* $f(\partial\mathbb{D} \setminus \{\lambda_0\}) \subset X$.

Celem tego referatu jest udowodnienie nastepujących twierdzeń:

Twierdzenie 1. *Jeżeli* L *jest zwartą, całkowicie rzeczywistą (n-wymiarową) podrozmaitością klasy* $\mathcal{C}^\infty$ *w* $\mathbb{C}^n$*, to istnieje niestały prawie gładki dysk analityczny o brzegu w* L.

Twierdzenie 2. *Niech* $X \subset \mathbb{C}^n$ *będzie zwarty i niech* $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{C}^n)$ *będzie niestałe, ograniczone i takie, że* $f^*(e^{i\theta}) \in X$ *dla prawie wszystkich* $\theta \in \mathbb{R}$*, oraz* $\int_{\mathbb{D}} ||f'||^2 d\mathcal{L}^2 < \infty$. *Wtedy* $f : \mathbb{D} \setminus f^{-1}(X) \to \mathbb{C}^n \setminus X$ *jest odwzorowaiem właściwym.*

Twierdzenie 3. *Istnieje* 2*-wymiarowa, całkowicie rzeczywista, zwrata podrozmaitość klasy* $\mathcal{C}^\infty$ *w* $\mathbb{C}^2$*, dla której nie istnieje niestały dysk analityczny o brzegu w niej.*