Asymptotyczne zachowanie metryki Kobayashiego w kierunku normalnym

Tomasz Warszawski

Dla obszaru $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, punktu $Q \in \Omega$ i wektora $\xi \in \mathbb{C}^n$ metryka Kobayashiego zdefiniowana jest następująco:

$$F_K^\Omega(Q, \xi) = \inf\{\alpha > 0 : \exists\phi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, \Omega) : \phi(0) = Q,\ \phi'(0) = \xi/\alpha\},$$

Niech P będzie punktem brzegowym obrzaru $\Omega = \{\rho < 0\}$, gdzie ρ jest funkcją definiującą klasy $\mathcal{C}^\infty$ i niech v będzie wektorem normalnym zewnętrznym do $\partial\Omega$ w punkcie P, czyli $v = \nabla\rho(P)/||\nabla\rho(P)||$. Pojawia się pytanie czy da się asymptotycznie oszacować $F_K^\Omega(P - \delta v, v)$, gdy $\delta > 0$ dąży do 0.

Oszacowanie $F_K^\Omega(P - \delta v, v) \leqslant 1/\delta$ wynika z rozważenia dysku $\phi(z) = P - \delta v + z\delta v$, który dla dostatecznie małych $\delta > 0$ mieści się w Ω. Oszacowanie asymptotyczne w drugą stronę, tzn. $F_K^\Omega(P - \delta v, v) \geqslant C/\delta$, ($C$ - stała dodatnia) jest prawdziwe dla obszarów silnie pseudowypukłych w $\mathbb{C}^n, n \geqslant 2$, pseudowypukłych typu skończonego w $\mathbb{C}^2$ oraz dla wypukłych. Hipoteza, że jest to również prawdą dla obszarów gładkich, pseudowypukłych i ograniczonych została obalona w pracy J. E. Fornaessa i L. Lee [1]. Zachodzi mianowicie

Twierdzenie. *Dla danego ciągu liczb dodatnich (a_n) rosnącego do ∞ istnieje obszar $\Omega \subset \mathbb{C}^3$ gładki, pseudowypukły, ograniczony typu nieskończonego oraz ciąg liczb dodatnich (δ_n) malejący do 0 i punkt $P \in \partial\Omega$ taki, że*

$$F_K^\Omega(P - \delta v, v) \leqslant \frac{1}{a_n \delta_n} \ .$$

Literatura

[1] J. E. Fornaess, L. Lee, Asymptotic behavior of the Kobayashi metric in the normal direction, Math. Z. 261 (2009), 399–408.