Józef Siciak
Seminarium Analizy Zespolonej
1. i 15. marca 2010

Klasyczne twierdzenia o szeregach lukowych jednej zmiennej zespolonej w wersji wielowymiarowej.

Mówimy, że funkcja holomorficzna f ma w punkcie $a \in \mathbb{C}^N$ *luki Ostrowskiego* $(m_k\,,\,n_k]$, jeśli m_k, n_k są liczbami naturalnymi, $m_k < n_k < m_{k+1}$ $(k \geq 1$, $\lim_{k\to\infty} \frac{n_k}{m_k} = \infty$,

$$\lim_{j\to\infty, j\in I} \sqrt[j]{\|Q_j\|_{\mathbb{B}}} = 0,$$

gdzie $Q_j(z) \equiv Q^{(f,a)}(z) := \sum_{|\alpha|=j} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} z^\alpha$, oraz $I := \cup_1^\infty (m_k\,,\,n_k]$.

Twierdzenie 1. *Jeśli funkcja f holomorficzna w obszarze $G \subset \mathbb{C}^N$ ma luki Ostrowskiego $(m_k\,,\,n_k]$ w punkcie $a \in G$, to ma ona luki Ostrowskiego $(m_{k_l}\,,\,\lceil \frac{n_{k_l}}{l} \rceil]$ w każdym punkcie $b \in G$, gdzie ciąg liczb naturalnych k_l jest tak dobrany, że $n_{k_l} > m_{k_l} l^2$ and $\lceil \frac{n_{k_l}}{l} \rceil < m_{k_{l+1}}$.*

Niech $D = \{z \in \mathbb{C}^N;\, h(z) < 1\}$ będzie zbalansowanym obszarem holomorficzności, gdzie h jest funkcjonałem Minkowskiego tego obszaru. Niech$f$ będzie funkcją holomorficzną daną w D szeregiem Taylora

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} Q_j(z), \quad z \in D. \tag{1}$$

Wiadomo, że D jest obszarem zbieżności szeregu (1) wtedy i tylko wtedy, gdy $h(z) = \Psi^*(z)$, gdzie $\Psi(z) = \Psi_f(z) := \limsup_{j\to\infty} \sqrt[j]{|Q_j(z)|}$ dla $z \in \mathbb{C}^N$.

Twierdzenie 2 (Fatou-Hurwitz-Polya). *Jeśli funkcjonał Minkowskiego h obszaru D jest ciągły prawiewszędzie w $\mathbb{C}^N$ oraz $h = \Psi_f^*$, to istnieje taki ciąg $\epsilon = \{\epsilon_j\}$, gdzie $\epsilon_j \in \{-1\,,\,1\}$, że funkcja $f_\epsilon(z) := \sum_{j=0}^\infty \epsilon_j Q_j(z)$, $z \in D$, jest nieprzedłużalna analitycznie poza D.*

Twierdzenie 3 (E. Fabry). *Jeśli D jest wypykły (tzn. h jest normą) oraz funkcja f holomorficzna w D ma rozwinięcie (1) takie, że $Q_j = 0$ dla $j \neq \{n_k\}$, gdzie n_k jest ciągiem liczb naturalnych, dla którego* $\lim_{k\to\infty} \frac{k}{n_k} = 0$*, to D jest maksymalnym obszarem istnienia funkcji f.*

Uwaga. Tw. 4 pozostaje prawdziwe, gdy funkcjonał jest ciągły oraz $\forall_{b\in\partial D}\exists_{\epsilon_o>0}\forall_{0<\epsilon<\epsilon_o}$ zbiór otwarty $D \cap \mathbb{B}(b,\epsilon)$ jest spójny.

References

1. L. Bieberbach, *Analytische Fortsetzung*, Springer, Berlin 1955.
2. M. Klimek, *Pluripotential Theory*, Oxford University Press 1991.
3. W. Luh, *Universal approximation properties of convergent power series on open sets*, Analysis **6** (1986), 191-207.
4. J.Siciak, *Sets in $\mathbb{C}^N$ with vanishing global extremal function and polynomial approximation*, manuscript (2009), 1-15.