Pewne uogólnienie klasycznego twierdzenia o krzyżu brzegowym
Abstrakt

Definicja 1. Mówimy, że otwarty podzbiór D jednowymiarowej rozmaitości zespolonej X jest *typu krzywej Jordana w* $\zeta \in \partial D$, jeżeli istnieje obszar Jordana $U \subset X$ taki, że $\zeta \in U$ oraz $U \cap \partial D$ jest wnętrzem krzywej Jordana.

Mówimy, że D jest *typu krzywej Jordana na zbiorze* $A \subset \partial D$ (w skrócie D - tkJ na A), jeżeli dla dowolnego $\zeta \in A$ D jest typu krzywej Jordana w ζ.

Definicja 2 (Krzyż brzegowy)**.** X, Y - jednowymiarowe rozmaitości zespolone, $D \subset X$, $G \subset Y$ - zbiory otwarte, $A \subset \partial D$, $B \subset \partial B$ takie, że D - tkJ na A, G - tkJ na B oraz A i B mają dodatnią długość w sensie Jordana.

Definiujemy:

- Krzyż brzegowy: $W = \mathbb{X}(A, B; D, G) := ((D \cup A) \times B) \cup (A \times (G \cup B))$
- Wnętrze krzyża: $W^\circ = \mathbb{X}^\circ(A, B; D, G) := (A \times G) \cup (D \times B)$
- Część regularną krzyża: $W^* := \mathbb{X}(A^*, B^*; D, G)$
- Otoczkę krzyża: $\widehat{W} = \widehat{\mathbb{X}}(A, B; D, G) := \{(z, w) \in (D \cup A^*) \times (G \cup B^*) : \omega(z, w) < 1\}$
- Otoczkę wnętrza krzyża: $\widehat{W^\circ} = \widehat{\mathbb{X}^\circ}(A, B; D, G) := \{(z, w) \in D \times G : \ \omega(z, w) < 1\}$,

gdzie $\omega(z, w) := \omega(z; A, D) + \omega(w; B, G)$ jest miarą harmoniczną na krzyżu.

Głównym tematem referatu jest szkic dowodu następującego twierdzenia.

Twierdzenie 3 (zob. [1])**.** *X, Y - jednowymiarowe rozmaitości zespolone, $D \subset X$, $G \subset Y$ - zbiory otwarte, $A \subset \partial D$, $B \subset \partial B$ takie, że D - tkJ na A, G - tkJ na B oraz A i B mają dodatnią długość w sensie Jordana.*
Jeżeli funkcja $f : W \to \mathbb{C}$ ma następujące własności:

(i) $f \in \mathcal{O}_S(W)$,
(ii) *f jest lokalnie ograniczona na W,*
(iii) *$f|_{A \times B}$ jest mierzalna w sensie Jordana,*
(iv) *dla każdego $a \in A$ $f(a, \cdot)|_G$ ma granicę kątową $f_1(a, b)$ w b dla p.w. (w sen. Jordana) $b \in B$, oraz dla każdego $b \in B$ $f(\cdot, b)|_D$ ma granicę kątową $f_2(a, b)$ w a dla p.w. $a \in A$; ponadto $f = f_1 = f_2$ p.w. na $A \times B$,*

to istnieje dokładnie jedna funkcja $\widehat{f} \in \mathcal{O}(\widehat{W^\circ})$ taka, że istnieją $\widetilde{A} \subset A \cap A^*$, $\widetilde{B} \subset B \cap B^*$ takie, że $A \setminus \widetilde{A}$, $B \setminus \widetilde{B}$ są długości zero (w sen. Jordana) oraz $\widehat{f}$ ma granicę kątową $f(\zeta, \eta)$ dla dowolnych $(\zeta, \eta) \in \mathbb{X}^\circ(\widetilde{A}, \widetilde{B}; D, G)$.

Ponadto:

(1) Jeżeli $|f|_W < \infty$, to $|\widehat{f}(z, w)| \leqslant |f|_{A \times B}^{1-\omega(z,w)} |f|_W^{\omega(z,w)}$ dla $(z, w) \in \widehat{W^\circ}$.
(2) Jeżeli dla dowolnego $(a_0, w_0) \in A^* \times G$ istnieje granica

$$\lim_{(z,w) \to (a_0, w_0), \ (z,w) \in W} f(z, w) =: \lambda,$$

to $\widehat{f}$ ma w (a_0, w_0) granicę kątową λ.
Jeżeli dla dowolnego $(z_0, b_0) \in D \times B^*$ istnieje granica

$$\lim_{(z,w) \to (z_0, b_0), \ (z,w) \in W} f(z, w) =: \eta,$$

to $\widehat{f}$ ma w (z_0, b_0) granicę kątową η.

(3) Jeżeli dla dowolnego $(a_0, b_0) \in A^* \times B^*$ *istnieje granica*

$$\lim_{(a,b)\to(a_0,b_0),\ (a,b)\in A\times B} f(a,b) =: \lambda,$$

to $\widehat{f}$ *ma w* (a_0, b_0) *granicę kątową* λ.

(4) Jeżeli $f|_{A\times B}$ *przedłuża się do funkcji ciągłej na* $A^* \times B^*$, *to istnieje dokładnie jedna funkcja* $\widetilde{f} \in \mathcal{C}(W^*)$ *taka, że* $\widetilde{f}|_{A\times B} = f$ *oraz dla dowolnego* $(\zeta, \eta) \in W^*$ $\widehat{f}$ *ma granicę kątową* $\widetilde{f}(\zeta, \eta)$. *Ponadto* $\widetilde{f} = f_1 = f_2$ *na* $(A \cap A^*) \times (B \cap B^*)$.

Literatura

[1] P.Pflug, V.-A. Nguyên, *Boundary cross theorem in dimension 1*, Annales Polonici Mathematici 90.2 (2007), str. 149 - 192.