Problem Bremermanna-Dirichleta dla nieograniczonych obszarów w $\mathbb{C}^n$

Arkadiusz Lewandowski

Zaprezentujemy główne wyniki pracy A. Simioniuca i G. Tomassiniego *The Bremermann-Dirichlet problem for unbounded domains of* $\mathbb{C}^n$ (Manuscripta Math. 126, 73-97, 2008). Zajmiemy się tzw. uogólnionym problemem Dirichleta ($\mathcal{GD}$) polegającym na znalezieniu dla danego obszaru nieograniczonego silnie pseudowypukłego $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ o brzegu klasy $\mathcal{C}^2$ funkcji $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ spełniającej warunki:

- u jest górnie półciągła na $\overline{\Omega}$,
- u jest plurisubharmoniczna na Ω,
- $u|_{\partial\Omega} = h$,

gdzie $h : \partial\Omega \to [0, \infty)$ jest funkcją ciągłą.

Rozważymy również problem istnienia maksymalnego rozwiązania ($\mathcal{GDP}$) – czyli tzw. problem Bremarmanna-Dirichleta ($\mathcal{BD}$).
Udowodnimy następujące

Theorem 0.1. *Dla obszaru nieograniczonego silnie pseudowypukłego $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ oraz funkcji ciągłej $h : \partial\Omega \to [0, \infty)$ problem ($\mathcal{GD}$) ma rozwiązanie u ciągłe na $\overline{\Omega}$.*

Theorem 0.2. *Dla obszaru nieograniczonego silnie wypukłego $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ oraz funkcji ciągłej $h : \partial\Omega \to [0, \infty)$ problem ($\mathcal{GD}$) ma (nieujemne) rozwiązanie maksymalne Φ.*

Przedyskutujemy problem ciągłości rozwiązania skonstruowanego w dowodzie Twierdzenia 0.2. Udowodnimy, że jeśli w Twierdzeniu 0.2 założymy dodatkowo, że h jest funkcją ograniczoną, to rozwiązanie maksymalne Φ, skonstruowane w dowodzie tegoż twierdzenia jest ciągłe na $\overline{\Omega}$.

Przedstawimy również (bez dowodu) wynik następujący

Theorem 0.3. *Dla obszaru nieograniczonego silnie pseudowypukłego $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ takiego, że $\Omega \subset \{z : |P(z)|^2 > (1 + |z|^2)^{\deg P}\}$ z pewnym wielomianem $P \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ oraz funkcji ciągłej $h : \partial\Omega \to [0, \infty)$ problem ($\mathcal{GD}$) ma (nieujemne) rozwiązanie maksymalne Φ.*