Kilka uwag o odległości Bergmana

(sprawozdanie z referatu Żywomira Dinewa, przedstawionego na seminarium Analiza Matematyczna 22 listopada 2010 r.)

Dla obszaru $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$, odległość Bergmana między $z, \zeta \in \Omega$ to

$$dist_\Omega(z,\zeta) := \inf\{\int_0^1 \beta(\gamma(t),\gamma'(t))dt : \gamma \text{ jest kawałkami } \mathcal{C}^1 \text{ krzywą taką, że } \gamma(0)=z, \gamma(1)=\zeta\}, \quad (0.1)$$

gdzie

$$\beta(z,X) = \beta_\Omega(z,X) := \sqrt{\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial\zeta_i \partial\bar{\zeta}_j} \log K(\zeta,\zeta)_{|\zeta=z} X_i \bar{X}_j}, \quad (0.2)$$

a $K(\zeta,\zeta)$ jest jądrem Bergmana (na przekątnej) obszaru Ω.

Głównym celem referatu jest zbadać pod kątem optymalności oszacowanie

$$dist_\Omega(z,\zeta) \geqslant \arccos \frac{|K(z,\zeta)|}{\sqrt{K(z,z)K(\zeta,\zeta)}}. \quad (0.3)$$

Oszacowanie to wynika z izometryczności tzw. zanurzenia Kobayashiego.

Dla z i ζ dostatecznie bliskich miedzy sobą, oszacowanie to jest dość dokładne, co wynika z twierdzenia o tzw. odległości Calabiego. Jeżeli natomiast z i ζ leżą daleko od siebie to argumenty z geometrii Riemanna wskazują, że oszacowanie powinno stawać się coraz bardziej niedokładne. W szczególności wynika to z faktu, że pomimo że zanurzenie Kobayashiego jest dane prostym wzorem, to jest ono bardzo „dzikie” (w referacie pokazuję, że nie jest całkowicie geodezyjne) nawet dla bardzo prostych obszarów Ω. Z drugiej strony przedstawiam przykład ciągu obszarów Ω_r (pierścieni na płaszczyźnie) takich, że oszacowanie to jest asymptotycznie dokładne dla odległych z_r i ζ_r ($\lim_{r\to 0} dist_\Omega(z_r,\zeta_r) = \frac{\pi}{2}$).