O $\mathbb{C}$-wypukłości

Definicja 1. *Funkcja u określona na otoczeniu $z \in \mathbb{C}$*

(1) *klasy $\mathcal{C}^2$ jest $\mathbb{C}$-wypukła w punkcie z gdy $u_{z\bar{z}}(z) \geqslant |u_{zz}(z) - u_z(z)^2|$*

(2) *klasy $\mathcal{C}^2$ jest ściśle $\mathbb{C}$-wypukła w punkcie z gdy $u_{z\bar{z}}(z) > |u_{zz}(z) - u_z(z)^2|$*

(3) *klasy $\mathcal{C}^1$ jest $\mathbb{C}$-wypukła w punkcie z gdy $\exists \delta_z > 0\, \forall w \in \mathbb{C} \quad |w - z| < \delta_z \Longrightarrow u(w) \geqslant u(z) - \log |(w - z)u_z(z) - 1|^2$*

(4) *klasy $\mathcal{C}^1$ jest ściśle $\mathbb{C}$-wypukła w punkcie z gdy $\exists \delta_z, c_z > 0\ \forall w \in \mathbb{C} \quad |w - z| < \delta_z \Longrightarrow u(w) \geqslant u(z) - \log |(w - z)u_z(z) - 1|^2 + c_z|w - z|^2$*

Funkcja u wielu zmiennych zespolonych jest odpowiednio $\mathbb{C}$-wypukła w punkcie z gdy jej zawężenie do dowolnej prostej zespolonej jest odpowiednio $\mathbb{C}$-wypukłe to znaczy funkcja $f(\lambda) = u(z + \lambda w)$ jest odpowiednio $\mathbb{C}$-wypukła w punkcie $\lambda = 0$.

Funkcja określona na zbiorze otwartym $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ jest odpowiednio $\mathbb{C}$-wypukła gdy jest w każdym punkcie tego zbioru odpowiednio $\mathbb{C}$-wypukła.

Definicja 2. *Obszar $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ jest*

(1) *$\mathbb{C}$-wypukły gdy jego przecięcie z dowolną prostą zespoloną jest spójne i jednospójne*

(2) *ściśle $\mathbb{C}$-wypukły gdy Ω jest klasy $\mathcal{C}^1$ (to znaczy $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n : p(z) < 0\}$ dla pewnego odwzorowania $p : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ klasy $\mathcal{C}^1$ takiego, że $p' \neq 0$ na $\partial\Omega$) i spełnia warunek $\forall z \in \partial\Omega\ \exists \varepsilon_z, c_z > 0\ \forall w \in \mathbb{C}^n\ |w| < \varepsilon_z, w \in T_z^{\mathbb{C}}(\Omega) \Longrightarrow p(z + w) \geqslant c_z|w|^2$*

Uwaga 1. *Spełnianie warunku (3) lub (4) w ustalonym punkcie przez funkcję klasy $\mathcal{C}^2$ implikuje spełnianie warunku (odpowiednio) (1) lub (2) ale nie na odwrót. Natomiast w przypadku obszaru są to definicje równoważne dla funkcji klasy $\mathcal{C}^2$.*

Celem tego referatu jest udowodnienie nastepujących twierdzeń:

Twierdzenie 1. *Jeśli Ω jest ograniczonym obszarem $\mathbb{C}$-wypukłym klasy $\mathcal{C}^1$ spełniającym warunek kuli wewnętrznej (to znaczy $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{B}(a_n, r)$ dla pewnych $a_n \in\ \Omega$ i $r > 0$) to istnieją obszary $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ściśle $\mathbb{C}$-wypukłe klasy $\mathcal{C}^1$ takie, że $\Omega_n \subset\subset \Omega_{n+1}$ i $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$.*

Twierdzenie 2. *Jeśli Ω jest ograniczonym obszarem $\mathbb{C}$-wypukłym klasy $\mathcal{C}^2$ to istnieją obszary $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ściśle $\mathbb{C}$-wypukłe klasy $\mathcal{C}^\infty$ takie, że $\Omega_n \subset\subset \Omega_{n+1}$ i $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$.*

W ich dowodzie użyteczne będą nastepujące twierdzenia:

Twierdzenie 3. *Jeśli Ω jest ograniczonym obszarem klasy $\mathcal{C}^1$ spełniającym warunek kuli wewnętrznej to funkcja $\delta(z) = \operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$jest klasy $\mathcal{C}^1$ w otoczeniu $\partial\Omega$ wewnątrz Ω.*

Twierdzenie 4. *Jeśli Ω jest ograniczonym obszarem $\mathbb{C}$-wypukłym klasy $\mathcal{C}^1$spełniającym warunek kuli wewnętrznej to funkcja $-\log \delta^2$jest $\mathbb{C}$-wypukła w otoczeniu $\partial\Omega$ wewnątrz Ω.*

Twierdzenie 5. *Jeśli Ω jest ograniczonym zbiorem otwartym oraz $u : \Omega \to \mathbb{R}$ ograniczoną z góry funkcją $\mathbb{C}$-wypukłą klasy $\mathcal{C}^1$ to istnieje ciąg funkcji ściśle $\mathbb{C}$-wypukłych klasy $\mathcal{C}^1$ zbiegających jednostajnie z góry do funkcji u.*

Twierdzenie 6. *Jeśli Ω i $U \subset\subset \Omega$ są ograniczonymi zbiorami otwartymi oraz $u : \Omega \to \mathbb{R}$ ograniczoną z góry funkcją $\mathbb{C}$-wypukłą klasy $\mathcal{C}^2$ to istnieje ciąg funkcji ściśle $\mathbb{C}$-wypukłych klasy $\mathcal{C}^\infty$ zbiegających jednostajnie z góry do funkcji u na U.*