Przedłużanie odwzorowań holomorficznych o wartościach w obszarach Hartogsa i Hartogsa-Laurenta

Oznaczenia:

- X - rozmaitość zespolona
- Λ_d - d-wymiarowa miara Hausdorffa (d - wymiar rzeczywisty)
- Dla $\varphi\colon X \to [-\infty, \infty)$ półciągłego z góry:
$$X_\varphi := \{(z,w) \in X \times \mathbb{C} : |w| < e^{-\varphi(z)}\}$$
- Dla $u, v\colon X \to [-\infty, \infty)$ półciągłych z góry, $u + v < 0$:
$$\mathcal{H}_{u,v}(X) := \{(z,w) \in X \times \mathbb{C} : e^{v(z)} < |w| < e^{-u(z)}\}$$

Definicja 1. *Mówimy, że X ma $\mathbb{D}^* - EP$, gdy dla dowolnego $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}^*, X)$ istnieje $\widetilde{f} \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, X)$ takie, że $\widetilde{f}|_{\mathbb{D}^*} = f$*

Definicja 2. *Niech $d \in [0, 2n]$. Mówimy, że X ma $(n, d) - EP$, gdy dla dowolnego $A \subset \mathbb{D}^n$ domkniętego w $\mathbb{D}^n$, o lokalnie skończonej mierze Λ_d, i dla dowolnego $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}^n \setminus A, X)$ istnieje $\widetilde{f} \in \mathcal{O}(\mathbb{D}^n, X)$ takie, że $\widetilde{f}|_{\mathbb{D}^n \setminus A} = f$*

Celem tego referatu jest udowodnienie nastepujących twierdzeń:

Twierdzenie 1. *Niech $\varphi\colon X \to [-\infty, \infty)$ będzie półciągłe z góry. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

- *X_φ ma $\mathbb{D}^* - EP$*
- *X ma $\mathbb{D}^* - EP$, $\varphi \in PSH(X)$ oraz $\varphi > -\infty$ na X*

Twierdzenie 2. *Niech $\varphi\colon X \to [-\infty, \infty)$ będzie półciągłe z góry, oraz $n \geq 1$, $d \in (2n-2, 2n-1)$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

- *X_φ ma $(n, d) - EP$*
- *X ma $(n, d) - EP$, $\varphi \in PSH(X)$ oraz $\varphi > -\infty$ na X*

Twierdzenie 3. *Niech $u \in SH(\mathbb{C})$ będzie ciągła, ograniczona od dołu i taka, że $\lim\limits_{|\lambda| \to \infty} u(\lambda) = \infty$. Wtedy $\mathcal{H}_{u,-\infty}(\mathbb{C})$ jest taut.*

Twierdzenie 4. *Niech G będzie obszarem w $\mathbb{C}^n$, $u, v\colon G \to [-\infty, \infty)$ będą półciągłe z góry i takie, że $u + v < 0$. Wtedy:*

- *Jeśli G ma $\mathbb{D}^* - EP$, $u, v > -\infty$ na G, $u, v \in PSH(G)$, to $\mathcal{H}_{u,v}(G)$ ma $\mathbb{D}^* - EP$*
- *Jeśli $\mathcal{H}_{u,v}(G)$ ma $\mathbb{D}^* - EP$, to $u, v \in PSH(G)$ oraz $u, v > -\infty$ na G.*

Dla ich dowodu wykazane zostaną następujące twierdzenia:

Twierdzenie 5. *Niech $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}^*)$ będzie takie, że*
$$\exists C \in \mathbb{R}\, \forall r \in (0,1) : \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{r\mathbb{D}^*} \log^+ |f| d\mathcal{L}^2 \leq C$$
Wtedy f rozszerza się holomorficznie przez 0.

Twierdzenie 6. *Jeżeli Ω jest obszarem w $\mathbb{C}^n$ posiadającym $\mathbb{D}^* - EP$, to Ω jest pseudowypukły.*