PRAWIE WŁAŚCIWE ZACHOWANIE SIĘ ODWZOROWAŃ EKSTREMALNYCH.

Definicja 1. Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem. Dla dowolnych z, $w \in D$ (odpow. $z \in D$, $X \in \mathbb{C}^n$) definiujemy:
• funkcję Lemperta

$$\widetilde{k}_D(z,w) := \inf\{r \in (0,1) : \exists\ f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D),\ f(0) = z,\ f(r) = w\},$$

• pseudometrykę Kobayashiego-Roydena

$$\kappa_D(z,X) := \inf\{r > 0 : \exists\ f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D),\ f(0) = z,\ rf'(0) = X\}.$$

Powiemy, że $f : \mathbb{D} \to D$ jest $\widetilde{k}_D$-ekstremalną (odpow. κ_D-ekstremalną), jeżeli f osiąga "inf"w powyższej definicji dla pewnych $z, w \in D$, $z \neq w$ (odpow. $z \in D$, $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$).

Definicja 2. Powiemy, że $D \Subset \mathbb{C}^n$ jest *słabym* obszarem Rungego, jeżeli isnieje obszar $G \supset \overline{D}$ taki, że dla każdego ograniczonego dysku analitycznego $f : \mathbb{D} \to G$ z tego, że $f^*(\mathbb{T}) \Subset D$ wynika $f(\mathbb{D}) \Subset D$.

Celem tego referatu jest udowodnienie nastpujących twierdzeń:

Twierdzenie 1. *Niech $D \Subset \mathbb{C}^n$ będzie słabym obszarem Rungego i niech $f : \mathbb{D} \to D$ będzie odwzorowaniem holomorficznym takim, że dla pewnego $\gamma > 0$ mamy*

$$\operatorname{dist}(f(\lambda), \partial D) \geq \gamma(1 - |\lambda|), \quad \lambda \in \mathbb{D}.$$

Załóżmy, że f jest $\widetilde{k}_D$-ekstremalną lub κ_D-ekstremalną. Wtedy dla każdego $\alpha > 0$ oraz $\beta < 1$ zbiór

$$\{\lambda \in \mathbb{T} : \operatorname{dist}(f(t\lambda), \partial D) \geq \alpha(1-t)^\beta, t \in (0,1)\}$$

ma miarę Lebesgue'a równą zero na $\mathbb{T}$. W szczególności, $f^*(\zeta) \in \partial D$ dla p.w. $\zeta \in \mathbb{T}$.

Twierdzenie 2. *Niech $D \Subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem i niech $f : \mathbb{D} \to D$ będzie odwzorowaniem holomorficznym takim, że dla pewnego $\gamma > 0$ mamy*

$$\operatorname{dist}(f(\lambda), \partial D) \geq \gamma(1 - |\lambda|), \quad \lambda \in \mathbb{D}.$$

Załóżmy, że $\sigma \in \mathbb{D}$ oraz f jest $\widetilde{k}_D$-ekstremalną dla $(f(0), f(\sigma))$. Wtedy $f'(\sigma) \neq 0$.