Pewne własności wykresu ruchu holomorficznego

referat na podstawie pracy Bo-Yong Chenga i Jinhao Zhanga
Holomorphic motions and invariant metrics

Niech Δ_r będzie kołem o środku w zerze i promieniu r. *Ruchem holomorficznym* na zbiorze $E \subset \mathbb{C}$ nazywamy odwzorowanie $f : \Delta_r \times E \to \mathbb{C}$ o następujących własnościach:

(1) $\forall\, z \in E\ f(0, z) = z$,
(2) $\forall\, \lambda \in \Delta_r$ odwzorowanie $f(\lambda, \cdot) : E \to \mathbb{C}$ jest injekcją,
(3) $\forall\, z \in E$ odwzorowanie $f(\cdot, z) : \Delta_r \to \mathbb{C}$ jest holomorficzne.

Wykresem ruchu holomorficznego $f : \Delta_r \times E \to \mathbb{C}$ nazywamy zbiór

$$\Gamma(f) := \{(\lambda, f(\lambda, z)) \in \mathbb{C}^2 : \lambda \in \Delta_r,\ z \in E\}.$$

Celem referatu jest wykazanie następującego twierdzenia.

Twierdzenie 1 ([BYJ])**.** *Jeżeli $f : \Delta_1 \times \Delta_1 \to \mathbb{C}$ jest ruchem holomorficznym, to dla każdego $r :\ 0 < r < 1$ wykres $\Gamma(f|_{\Delta_r \times \Delta_1})$ jest oganiczonym obszarem holomorficzności takim, że metryki Carathéodoriego, Kobayashiego i Bergmana są na nim równoważne.*

Podstawowym narzędziem w dowodzie jest najważniejsze twierdzenie teorii ruchów holomorficznych, tzw. λ-Lemat, który pozwoli nam zastąpić ruch holomorficzny f pewnym odwzorowaniem L-quasikonforemnym F.

Twierdzenie 2 (λ-Lemat, [S])**.** *Jeżeli $f : \Delta_1 \times E \to \mathbb{C}$ jest ruchem holomorficznym, to istnieje $F : \Delta_1 \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ przedłużenie f takie, że:*

(1) *F jest ruchem holomorficznym w $\mathbb{C}$,*
(2) *dla dowolnego $\lambda \in \Delta_1$ odwzorowanie $F(\lambda, \cdot) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest L-quasikonforemne o dylatacji $L \leqslant \frac{1+|\lambda|}{1-|\lambda|}$,*
(3) *F spełnia warunek Höldera względem obydwu zmiennych.*

Teraz, dzięki własnościom odwzorowań L-quasikonforemnych, można pokazać, że dla ustalonych punktów (λ^*, z^*) istnieje pewien biholomorfizm $\Phi^* : \Gamma(f|_{\Delta_r \times \Delta_1}) \to \Delta_1^2$ i stała a zależna tylko od r takie, że $\Phi^*(\lambda^*, f(\lambda^*, z^*)) = 0$ oraz

$$\Delta_a^2 \subset \Phi^*(\Gamma(f|_{\Delta_r \times \Delta_1})) \subset \Delta_1^2,$$

skąd wynika żądana równoważność metryk Carathéodoriego, Kobayashiego i Bergmana na $\Gamma(f|_{\Delta_r \times \Delta_1})$.

Literatura

[BYJ] C. Bo-Yong, Z. Jinhao, *Holomorphic motion and invariant metrics*, Analytic Geometry of the Bergman Kernel and Related Topics, RIMS Research Collections No. 1487 (2006), 27-39
[S] Z. Słodkowski, *Holomorphic motions and polynomial hulls*, Proc. AMS 111 (1991), 347-355