Skończoność łańcuchów Kobayashiego w obszarach silnie pseudowypukłych

Tomasz Warszawski

Dla obszaru $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, punktów $P, Q \in \Omega$ i wektora $\xi \in \mathbb{C}^n$ metryka Kobayashiego oraz odległość Kobayashiego zdefiniowane są następująco:

$$F_K^\Omega(P,\xi) = \inf\{\alpha > 0 : \exists \phi \in \mathcal{O}(\mathbb{D},\Omega) : \phi(0) = P, \phi'(0) = \xi/\alpha\},$$

$$K(P,Q) = \inf\{\sum_{j=1}^{k} \rho(u_j, v_j) : k \in \mathbb{N},\ u_j, v_j \in \mathbb{D} \text{ oraz } \exists\ p_0, \ldots, p_k \in \Omega : p_0 = P,\ p_k = Q$$
$$\exists f_j \in \mathcal{O}(\mathbb{D},\Omega) : f_j(u_j) = p_{j-1},\ f_j(v_j) = p_j,\ j = 1, \ldots, k\},$$

gdzie ρ jest odległóścią Poincárego na dysku jednostkowym $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$.

Układ punktów p_j i funkcji f_j nazywamy łańcuchem Kobayashiego o długości k.

Lempert pokazał w [4], że na obszarach wypukłych można zawsze przyjąć $k = 1$. Pojawia się w ten sposób naturalne pytanie, czy w innych klasach obszarów da się oszacować z góry długość potrzebnych łańcuchów. Krantz pozytywnie odpowiedział na to pytanie w przypadku obszarów silnie pseudowypukłych klasy $\mathcal{C}^2$. Dokładniej, zachodzi

Twierdzenie 1. (Krantz [1]). *Niech $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ będzie ograniczonym obszarem silnie pseudowypukłym klasy $\mathcal{C}^2$. Wówczas istnieje stała K zależna od Ω taka, że dla dowolnych punktów $P, Q \in \Omega$ oraz liczby $\epsilon > 0$ istnieje łańcuch Kobayashiego złożony z K funkcji holomorficznych i $K + 1$ punktów, dla którego wyrażenie w definicji odległości Kobayashiego punktów P, Q różni się od odległości Kobayashiego punktów P, Q o mniej niż ϵ.*

W dowodzie tego twierdzenia korzysta się z następujących twierdzeń:

Twierdzenie 2. (Krantz [1]). *Niech $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ będzie ograniczonym obszarem silnie pseudowypukłym klasy $\mathcal{C}^2$. Niech $z, w, s \in \Omega$ oraz $\zeta, \omega, \omega', \sigma \in \mathbb{D}$ będą ustalonymi punktami . Wówczas istnieje $\delta > 0$ taka, że dla dowolnych funkcji holomorficznych $f, g : \mathbb{D} \to \Omega$ spełniających*

$$f(\zeta) = z,\ f(\omega) = g(\omega') = w,\ g(\sigma) = s$$
$$\sup_{\lambda \in \mathbb{D}} |\, f(\lambda) - g(\lambda)| < \delta$$

istnieje funkcja holomorficzna $h : \mathbb{D} \to \Omega$ taka, że $h(\zeta) = z,\ h(\sigma) = s$.

Twierdzenie 3. (Fornaess [2]). *Niech $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ będzie ograniczonym obszarem silnie pseudowypukłym klasy $\mathcal{C}^k,\ k \geqslant 2$. Wówczas istnieją $n' \geqslant n$, silnie wypukły obszar $\Omega' \subset \mathbb{C}^{n'}$ klasy $\mathcal{C}^k$, otwarte otoczenie Ω_0 zbioru $\overline{\Omega}$ oraz funkcja holomorficzna właściwa $\psi : \Omega_0 \to \mathbb{C}^{n'}$ odwzorowująca Ω_0 biholomorficznie na domkniętą podrozmaitość zespoloną $\psi(\Omega_0)$ w $\mathbb{C}^{n'}$, przy czym $\psi(\Omega) \subset \Omega',\ \psi(\Omega_0 \setminus \overline{\Omega}) \subset \mathbb{C}^{n'} \setminus \overline{\Omega'}$ i $\psi(\Omega_0)$ przecina $\partial\Omega'$ transwersalnie.*

Twierdzenie 4. (Docquier-Grauert [3]). *Niech K będzie zwartym podzbiorem domkniętej podrozmaitości zespolonej M. Wówczas istnieje otwarte otoczenie U zbioru K i holomorficzna retrakcja $\pi : U \to U \cap M$.*

Literatura

[1] S. Krantz, The Kobayashi metric, extremal discs and biholomorphic mappings, arXiv:0909.1041v1, 13-14.
[2] J. E. Fornaess, Strictly pseudoconvex domains in convex domains, Am. J. Math. 98(1976), 529-569.
[3] H. Rossi, A Docquier-Grauert lemma for strongly pseudoconvex domains in complex manifolds, The Rocky Mountain J. of Math. vol. 6, no. 1, (1976).
[4] L. Lempert, La metrique Kobayashi et las representation des domains sur la boule, Bull. Soc. Math. France 109(1981), 427-474.