HOLOMORFICZNE ODWZOROWANIA WŁAŚCIWE POMIĘDZY OBSZARAMI d-ZBALANSOWANYMI I ZBALANSOWANYMI

W 1931 H. Cartan udowodnił następujące

Twierdzenie 1 ([3])**.** *Niech $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}^n$, będą ograniczonymi obszarami zbalansowanymi i niech $f \in \mathcal{O}(D_1, D_2)$ będzie biholomorfizmem takim, że $f(0) = 0$. Wtedy istnieje liniowy izomorfizm $L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ taki, że $f = L|_{D_1}$.*

W roku 2000 F. Berteloot i G. Patrizio udowodnili ogólniejsze

Twierdzenie 2 ([1])**.** *Niech $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}^n$, będą ograniczonymi obszarami zbalansowanymi i niech $f \in \mathcal{O}(D_1, D_2)$ będzie odwzorowaniem właściwym takim, że $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$. Załóżmy ponadto, że $f_p^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ dla odwzorowania jednorodnego f_p najniższego stopnia z rozwinięcia f w szereg Taylora w 0. Wtedy $f = f_p$.*

W pracy [2] autor częściowo uogólnia (zob. Twierdzenie 14 (b)) i upraszcza dowód wyniku F. Berteloota i G. Patrizia.

1. Obszary d-zbalansowane

Niech $d = (d_1, \dots, d_n)$, gdzie $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{N}$ są liczbami względnie pierwszymi. Dla $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$, przyjmujemy $\lambda^d z := (\lambda^{d_1} z_1, \dots, \lambda^{d_n} z_n)$. Ponadto, niech

$$\|z\|_d := \sum_{j=1}^{n} |z_j|^{1/d_j}, \quad z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n,$$

oznacza quasi-normę w $\mathbb{C}^n$. Zauważmy, że w przypadku $d_1 = \dots = d_n = 1$ jest to norma $\| \ \|_1$. Będziemy pisać $B_d(a, r) := \{z \in \mathbb{C}^n : \|z - a\|_d < r\}$, $B_d := B_d(0, 1)$.

Uwaga 3. Niech $d \in \mathbb{N}^n, \ z, w \in \mathbb{C}^n, \ \lambda \in \mathbb{C}$.

(a) $\|z\|_d = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
(b) $\|\lambda^d z\|_d = |\lambda| \|z\|_d$.
(c) $\|z + w\|_d \leqslant \|z\|_d + \|w\|_d$.

Definicja 4. Obszar $D \subset \mathbb{C}^n$ nazywamy *d-zbalansowanym*, jeśli $\lambda^d z \in D$ dla dowolnych $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$, $z \in D$.

Uwaga 5. Obszar $(1, \dots, 1)$-zbalansowany jest obszarem zbalansowanym.

Definicja 6. Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem d-zbalansowanym. Funkcję

$$h_{D,d}(z) = \inf\{t > 0 : (t^{-1})^d z \in D\}, \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

nazywamy *d-funkcjonałem Minkowskiego* obszaru D.

Propozycja 7. *Niech h_D będzie d-funkcjonałem Minkowskiego d-zbalansowanego obszaru $D \subset \mathbb{C}^n$. Wtedy*

(a) *$h_{D,d}(\lambda^d z) = |\lambda| h_{D,d}(z)$, $z \in \mathbb{C}^n, \ \lambda \in \mathbb{C}$;*
(b) *$D = \{z \in \mathbb{C}^n : h_{D,d}(z) < 1\}$ oraz funkcja $h_{D,d}$ jest półciągła z góry;*
(c) *istnieje stała $C > 0$ taka, że $h_{D,d}(z) \leqslant C\|z\|_d$, $z \in D$;*
(d) *następujące warunki są równoważne*
  (i) *D jest pseudowypukły,*
  (ii) *$\log h_{D,d} \in \mathcal{PSH}(\mathbb{C}^n)$,*
  (iii) *$h_{D,d} \in \mathcal{PSH}(\mathbb{C}^n)$.*

Definicja 8. Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem d-zbalansowanym. Funkcję

$$g_{D,d}(z) = \sup\{u(z) : u \in \mathcal{K}_d(D)\}, \quad z \in D,$$

gdzie

$$\mathcal{K}_d(D) := \{u \in \mathcal{PSH}(D) : u < 0,\ \exists_{r>0}\ \exists_{M\in\mathbb{R}}\ \forall_{z\in B(0,r)}\ u(z) \leqslant M + \log \|z\|_d\},$$

nazywamy *d-funkcją Greena* obszaru D.

Uwaga 9. Zauważmy, że $g_{D,(1,\dots,1)} = g_D$ jest zwykłą plurizespoloną funkcją Greena z biegunem w 0.

Twierdzenie 10. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem d-zbalansowanym. Wtedy*

(a) $g_{D,d} \leqslant \log h_{D,d}$ *na* D*;*
(b) *jeśli D jest pseudowypukły, to* $g_{D,d} = \log h_{D,d}$ *na* D*;*
(c) $g_{D,d} \in \mathcal{K}_d(D)$.

2. Odwzorowania d-jednorodne

Niech $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}^n$ będą obszarami takimi, że D_1 jest d-zbalansowany, zaś D_2 jest zbalansowany. W D_1 rozważamy quasi-normę $\| \ \|_d$, zaś w D_2 — normę $\| \ \|_1$.

Definicja 11. Odwzorowanie $f \in \mathcal{O}(D_1, D_2)$ nazywamy *d-jednorodnym* stopnia $k \in \mathbb{N}$, jeśli $f(\lambda^d z) = \lambda^k f(z)$, $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$, $z \in D_1$.

Przykład 12. Odwzorowanie $\mathbb{C}^2 \ni (z, w) \mapsto (z^3, w^2) \in \mathbb{C}^2$ jest $(2, 3)$-jednorodne stopnia 6.

Propozycja 13. *Niech $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}^n$ będą obszarami takimi, że D_1 jest d-zbalansowany, zaś D_2 jest zbalansowany. Ponadto, niech $f \in \mathcal{O}(D_1, D_2)$ będzie takie, że $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$. Wtedy istnieje liczba $p \in \mathbb{N}$ taka, że*

$$f = \sum_{k=p}^{\infty} f_k, \tag{1}$$

gdzie $f_k \in \mathcal{O}(D_1, D_2)$ jest odwzorowaniem d-jednorodnym stopnia k. Jeśli dodatkowo $f_p^{-1}(\{0\}) = \{0\}$, to istnieją stałe $C_1, C_2 > 0$ oraz zbiór otwarty U, $0 \in U \subset D_1$, takie, że

$$C_1 \|z\|_d^p \leqslant \|f(z)\|_1 \leqslant C_2 \|z\|_d^p, \quad z \in U. \tag{2}$$

Twierdzenie 14. *Niech $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}^n$ będą obszarami takimi, że D_1 jest d-zbalansowany, zaś D_2 jest zbalansowany i niech $f \in \mathcal{O}(D_1, D_2)$ będzie odwzorowaniem właściwym, $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$. Załóżmy ponadto, że $f_p^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ dla odwzorowania f_p z rozwinięcia (1). Wtedy*

(a) $g_{D_2} \circ f = p g_{D_1,d}$*;*
(b) *jeśli ponadto D_1 lub D_2 jest pseudowypukły, to* $f_p^{-1}(D_2) = D_1$.

Literatura

[1] F. Berteloot, G. Patrizio, *A Cartan theorem for proper holomorphic mappings of complete circular domains*, Adv. Math. **153** (2000), 342–352.
[2] M. Boutat, *Proper holomorphic mappings between quasi-circular domains and complete circular domains*, Bull. Sci. Math. **133** (2009), 335–347.
[3] H. Cartan, *Les fonctions de deux variables complexes et le problème de la représentation analytique*, J. Math. Pures Appl. **10** (1931), 1–114.