Właściwość dysków ograniczonych o skończonej powierzchni

W referacie wykazano następujące twierdzenia:

Twierdzenie 1. *Niech $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^n$ będzie klasy $\mathcal{C}^1$. Załóżmy ponadto, że spełnia warunki:*

(1) *istnieje $\delta > 0$ takie, że dla prawie wszystkich $\theta \in (-\delta, \delta)$ zachodzi*

$$\limsup_{r \to 1^-} \|f(re^{i\theta}\| \geq 1,$$

(2) *istnieją $\lambda > 0$ oraz ciąg $(z_p)_{p=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$ zmierzający do 1 takie, że $\|f(z_p)\| \leq 1 - \lambda$,*

(3) *istnieje $C > 0$ takie, że dla dowolnych $z \in \mathbb{D}$ i $r \in (0, 1 - |z|)$ zachodzi nierówność*

$$\|f'(z)\| \leq \frac{C}{\pi r^2} \int_{K(z,r)} \|f'\| d\mathcal{L}^2.$$

Wtedy $\int_{\mathbb{D}} \|f'\|^2 d\mathcal{L}^2 = \infty$.

Twierdzenie 2. *Niech $f \in H^{\infty}(\mathbb{D}, \mathbb{C}^n)$ będzie takie, że:*

(1) *dla prawie wszystkich $\theta \in \mathbb{R}$: $\|f^*(e^{i\theta})\| \geq 1$,*

(2) *istnieją $\lambda > 0$ oraz ciąg $(z_p)_{p=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$ takie, że $|z_p| \to 1$ oraz $\|f(z_p)\| \leq 1 - \lambda$.*

Wtedy $\int_{\mathbb{D}} \|f'\|^2 d\mathcal{L}^2 = \infty$.

Twierdzenie 3. *Niech $X \subset \mathbb{C}^n$ będzie zwarty, a $f \in H^{\infty}(\mathbb{D}, \mathbb{C}^n)$ będzie niestałe i takie, że dla prawie wszystkich $\theta \in \mathbb{R}$ zachodzi $f^*(e^{i\theta}) \in X$. Załóżmy ponadto, że $\int_{\mathbb{D}} \|f'\|^2 d\mathcal{L}^2 < \infty$. Wtedy f jest właściwe jako odwzorowanie $\mathbb{D} \setminus f^{-1}(X) \to \mathbb{C}^n \setminus X$.*