Współrzędne reprezentatywne
(sprawozdanie z referatu Żywomira Dinewa, przedstawionego na seminarium Geometryczna Teoria Funkcji 26 kwietnia i 17 maja 2010 r.)

Dla obszaru $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$, $z_0 \in \Omega$ i $i = 1..n$,

$$w_i(z) = \sum_{j=1}^{n} T^{\bar{j}i}(z_0) \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_j} \log \frac{K(z,\zeta)}{K(\zeta,\zeta)}_{|\zeta=z_0},$$

gdzie $T^{\bar{j}i}(z_0)$ jest macierzą odwrotną do macierzy tensora metrycznego metryki Bergmana w punkcie z_0, jest i-tą współrzędną reprezentatywną. Odwzorowanie

$$w : \Omega \ni z \to (w_1(z), w_2(z), ..., w_n(z))^t \in \mathbb{C}^n$$

jest odwzorowaniem generowanym przez współrzędne reprezentatywne.

W tym referacie przedstawimy następujące dwa wyniki

Twierdzenie 1. *Niech $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ będzie ograniczonym obszarem, wyposażonym w metrykę Bergmana. Dla każdego $z_0 \in \Omega$, współrzędne reprezentatywne dla obszaru Ω o środku w punkcie z_0 są dobrze określone (a więc holomorficzne, bez osobliwości) w kuli geodezyjnej $\{z \in \Omega : dist_\Omega(z, z_0) < \frac{\pi}{2}\}$.*

Powyżej odległość $dist_\Omega$ to geodezyjna odległość względem metryki Bergmana.

Twierdzenie to w szczególności wykazuje, że promień kuli geodezyjnej, w której współrzędne geodezyjne są dobrze określone, jest stałą uniwersalną, nie zależną ani od wymiaru, ani od obszaru Ω, ani od położenia punktu $z_0 \in \Omega$.

Twierdzenie 2. *Niech $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem ograniczonym, wyposażonym w metrykę Bergmana. Niech $c \in (-\infty, n+1)$ będzie globalnym dolnym ograniczeniem krzywizny Ricciego metryki Bergmana. Dla dowolnego $z_0 \in \Omega$ odwzorowanie generowane przez współrzędne reprezentatywne*

$$z \to (w_1(z), w_2(z)..., w_n(z))^t$$

jest immersją w kuli geodezyjnej $\{z \in \Omega : dist_\Omega(z, z_0) < \frac{\pi}{2\sqrt{n+1-c}}\}$.

Twierdzenie to wykazuje, że kontrolę obszaru immersywności współrzędnych reprezentatywnych uzyskujemy tylko dzięki wiedzy o zachowaniu krzywizny Ricciego metryki Bergmana.

(Dokonując obliczeń można wykazać, że krzywizna Ricciego dla metryki Bergmana wynosi

$$Ric_U(z, X) = -\left(\sum_{p,q=1}^{n} g_{p\bar{q}} X_p \overline{X_q}\right)^{-1} \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \bar{z}_l} \log(\det(g_{j\bar{i}})_{i,j=1..n}) X_k \overline{X_l},$$

gdzie $g_{i\bar{j}} = T_{i\bar{j}} = \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \log K(z,z)$.)

Główna techniczna trudność przy definicji współrzędnych reprezentatywnych związana jest z występowaniem zbiorów analitycznych, składających się z punktów osobliwych dla ww. funkcji

$$W_{z_0} := \{z \in \Omega : K(z, z_0) = 0\}$$

i

$$\tilde{W}_{z_0} := \{z \in \Omega : \det\left(K(z,z_0)^2 \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{\zeta}_j} \log K(z,\zeta)_{i,j=1..n}\right)_{|\zeta=z_0} = 0\}.$$

Te zbiory analityczne udaje się kontrolować (w sensie oszacowania ich odległości od punktu z_0) dzięki nierównościom

$$dist_\Omega(z,\zeta) \geq \arccos \frac{|K(z,\zeta)|}{\sqrt{K(z,z)K(\zeta,\zeta)}}, \tag{0.1}$$

i stosownie

$$\tilde{dist}(z,\zeta) \geq$$

$$= \arccos \frac{\left| \det \left(K(z,\zeta)^2 \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{\zeta}_j} \log K(z,\zeta) \right)_{i,j=1..n} \right|}{\sqrt{\det(K(z,z)^2 T_{i\bar{j}}(z))_{i,j=1..n} \det(K(\zeta,\zeta)^2 T_{i\bar{j}}(\zeta))_{i,j=1..n}}}, \tag{0.2}$$

Druga (trudniejsza) z nierówności uzyskana jest przy pomocy tzw. zanurzenia Lu Qi-Kenga obszaru Ω z metryką $\tilde{\beta} = (n+1)T_{i\bar{j}} - Ric_{i\bar{j}}$ w nieskończenie wymiarowy Grasmanian $n-$ wymiarowych podprzestrzeni.