ODWZOROWANIA EKSTREMALNE W KLASIE OBSZARÓW REINHARDTA

Podczas referatu przedstawiona została metoda, która pozwala zcharakteryzować odwzorowania ekstremalne w dużej klasie obszarów hiperwypukłych. Metoda ta, wprowadzona przez Poletskyego [2], uogólniona przez Edigariana [1], polega na traktowaniu odwzorowań ekstremalnych, jako obiektów maksymalizujących pewne układy przekształceń liniowych.

Głównym wynikiem serii referatów jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1. *Niech $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}^n$ będzie ograniczonym odwzorowaniem holomorficznym oraz niech D będzie otwartym otoczeniem $\overline{f(\mathbb{D})}$. Załóżmy, że $u \in PSH(D) \cap \mathcal{C}(D)$ jest taka, że $u(f) < 0$ na $\mathbb{D}$ oraz niech $p : L^1(\mathbb{T}, \mathbb{C}^n) \to [0, +\infty)$ będzie funkcją spełniającą następujące warunki*

- *$p(h_1 + h_2) \le p(h_1) + p(h_2)$, dla każdych $h_1, h_2 \in L^1(\mathbb{T}, \mathbb{C}^n)$,*
- *$p(th) = tp(h)$, for $t \ge 0$, dla każdego $h \in L^1(\mathbb{T}, \mathbb{C}^n)$,*
- *istnieje $M \in (0, +\infty)$ taka, że $p(h) \le M|h|_1$, gdzie $|\cdot|_1$ jest normą w $L^1(\mathbb{T}, \mathbb{C}^n)$,*
- *$\int_0^{2\pi} [u(f^*(e^{i\theta}) + h(e^{i\theta}))]^+ d\theta \le p(h) + o(||h||_\infty)$ dla odpowiednio małych $||h||_\infty$, gdzie $h \in \mathcal{A}(\mathbb{D}, \mathbb{C}^n)$ oraz $[a]^+ := \max\{a, 0\}$.*

Załóżmy, że f jest ekstremalną dla (P) w $\{z \in D : u(z) < 0\}$. Wtedy istnieją $\lambda_1, ..., \lambda_N \in \mathbb{R}$, nie wszystkie równe zeru, $g \in H^\infty(\mathbb{D}, \mathbb{C}^n)$, $g(0) = 0$, oraz $T > 0$ takie, że

$$\int_0^{2\pi} \mathfrak{Re} \left(\left(\sum_{k=1}^N \lambda_k \omega_k(e^{i\theta}) + g^*(e^{i\theta}) \right) \bullet h(e^{i\theta}) \right) d\theta \le Tp(\mathbf{1}_A \cdot h),$$

dla każdego $h \in L^1(\mathbb{T}, \mathbb{C}^n)$, gdzie A jest zbiorem punków $\theta \in (0, 2\pi]$ takich, że $u(f^*(e^{i\theta})) = 0$. Jeżeli Φ_j są liniowo niezależne, to $u(f^*) = 0$ p.w. on $\mathbb{T}$.

Twierdzenie 1 uogólnia Twierdzenie 3 w [2] and Twierdzenie 1 w [1].

Jako zastosowanie Twierdzenie 1, pokazaliśmy następującą:

Propozycja 2. *Niech $f = (f_1, f_2) : \mathbb{D} \to D_\alpha$ będzie $\widetilde{k}_{D_\alpha}$-ekstremalną, gdzie*

$$D_\alpha := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1, |w| < 1, |zw| < \alpha\},$$

dla pewnego $\alpha \in (0, 1)$. Wtedy mogą zajść następujące przypadki:

(1) *f jest $\widetilde{k}_{\mathbb{D}\times\mathbb{D}_\alpha}$-ekstremalną lub $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D} \times \partial\mathbb{D}_\alpha$.*
(2) *f jest $\widetilde{k}_{\mathbb{D}_\alpha\times\mathbb{D}}$-ekstremalną lub $f : \mathbb{D} \to \partial\mathbb{D}_\alpha \times \mathbb{D}$.*

(3) $f_1(\lambda) = \frac{\lambda-\beta_1}{1-\overline{\beta_1}\lambda}F(\lambda)$, $f_2(\lambda) = e^{i\theta}\frac{\lambda-\beta_2}{1-\overline{\beta_2}\lambda}\frac{\alpha}{F(\lambda)}$, *gdzie* $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{D}$, $\theta \in \mathbb{R}$, *oraz* $F : \mathbb{D} \to A_\alpha$ *jest odwzorowaniem holomorficznym. Ponadto, jeżeli* $\beta_1 \neq \beta_2$, *to* F *jest* $\widetilde{k}_{A_\alpha}$-*ekstremalną.*

(4) $f_1(\lambda) = F(\lambda)$, $f_2(\lambda) = e^{i\theta}\frac{\lambda-\beta}{1-\overline{\beta}\lambda}\frac{\alpha}{F(\lambda)}$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{D}$, $F : \mathbb{D} \to A_\alpha$ *jest odwzorowaniem holomorficznym.*

(5) $f_1(\lambda) = e^{i\theta}\frac{\lambda-\beta}{1-\overline{\beta}\lambda}\frac{\alpha}{F(\lambda)}$, $f_2(\lambda) = F(\lambda)$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{D}$, $F : \mathbb{D} \to A_\alpha$ *jest odwzorowaniem holomorficznym,*

gdzie $A_\alpha := \{z \in \mathbb{C} : \alpha < |z| < 1\}$.

Literatura

[1] A. Edigarian, *On extremal mappings in complex ellipsoids*, Ann. Polon. Math. 62 (1995), 83–96.

[2] E. Poletsky, *The Euler-Lagrange equations for extremal holomorphic mappings of the unit disk*, Michigan Math. J. 30 (1983), 317–333.