Modelowanie z użyciem funkcji Copula. Modelowanie portfela akcji przy użyciu modelu copula-GARCH

Marcin Pitera, Tomasz Drożdż

23 maja 2010

Czym jest kopuła?

Intuicja

Kopuły matematyczne można rozumieć (interpretować) na dwa sposoby:

1. Jako funkcje, które łączą (lepiej chyba powiedzieć “spajają”) wielowymiarowy rozkład łączny z jednowymiarowymi rozkładami brzegowymi.
2. Jako wielowymiarowy rozkład prawdopodobieństwa określony na n-wymiarowej kostce ($[0,1]^n$), którego rozkłady brzegowe są rozkładami jednostajnymi na odcinku $[0,1]$.

2-kopuła

Założenia

- X, Y - zmienne losowe
- $H(x,y) = P[X \leq x, Y \leq y]$ - dystrybuanta łączna
- $F(x) = P[X \leq x] = H[x, \infty]$ - dystrybuanta brzegowa dla X
- $G(y) = P[Y \leq y] = H[\infty, y]$ - dystrybuanta brzegowa dla Y

2-kopuła

2-kopuła będzie funkcją łącząca F i G z H. Na mocy tw. Sklara:

$$H(x,y) = C(F(x), G(y))$$

Widać poza tym, że C też będzie rozkładem prawdopodobieństwa (możemy wziąć X i Y jako zmienne o rozkładzie jednostajnym na $[0,1]$, wtedy (na $[0,1]$)

$$H(x,y) = P[X \leq x, Y \leq y] = P[F(X) \leq F(x), G(Y) \leq G(y)] =$$

$$= P[F(X) \leq x, G(Y) \leq y] = P[X \leq F^{-1}(x), Y \leq G^{-1}(y)] = C(x,y)$$

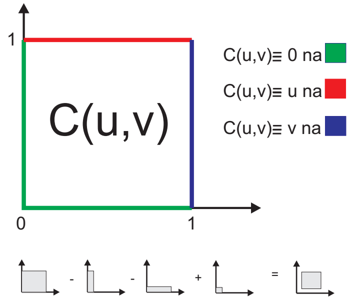
Definicja 2-kopuły

Definicja

2-kopułą nazywamy funkcję $C : I^2 \to I$, która spełnia nastepujące warunki:

1. Dla każdego $u, v \in I$, $C(u, 0) = C(0, v) = 0$, $C(u, 1) = u$ oraz $C(1, v) = v$
2. Dla $u_1, u_2, v_1, v_2 \in I$ takich, że $u_1 \leq u_2$, $v_1 \leq v_2$ C jest 2-rosnąca. Mamy

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0$$



Twierdzenie Sklara

Twierdzenie (Sklar 1959)

Niech H będzie dystrybuantą dwuwymiarową z funkcjami brzegowymi F oraz G. Istnieje wtedy kopuła C taka, że:

$$\forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}: \quad H(x, y) = C(F(x), G(y))$$

Ponadto:

1. Jeżeli F i G są ciągłe, to C jest jedyna. W przeciwnym przypadku C jest jednoznacznie określona na $Ran(F) \times Ran(G)$.
2. Podobnie jeżeli C jest kopułą oraz F i G są dystrybuantami, to funkcja H zdefiniowana powyżej jest dystrybuantą łączną o funkcjach brzegowych F i G.

Odwrócenie dystrybuant

Zakładając, że dystrybuanty są ściśle rosnące albo rozważając funkcje quasi-odwrotne dostajemy też wzór:

$$\forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}: \quad C(x, y) = H(F^{(-1)}(x), G^{(-1)}(y))$$

Uwaga

Jedną z rzeczy, która czyni kopuły użytecznymi w statystyce, czy rachunku prawdopodobieństwa jest fakt, że zachowują się one w przewidywalny sposób, gdy przepuszczamy zmienną losową X przez monotoniczne funkcje.

Twierdzenie

Niech X i Y będą ciągłymi zmiennymi losowymi z kopułą C_{XY}. Jeżeli funkcje α i β są ściśle monotoniczne na $Ran(X)$ i $Ran(Y)$. Wtedy:

1. Jeżeli α - ściśle rosnąca, β ściśle rosnąca, to

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)} = C_{XY}$$

2. Jeżeli α - ściśle rosnąca, β ściśle malejąca, to

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u - C_{XY}(u, 1 - v)$$

Kopuły archimedesowe

Definicja

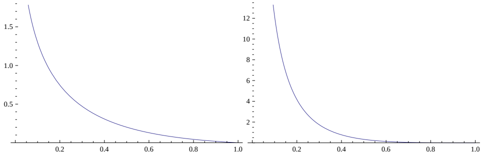
Kopuły postaci:

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))$$

$\varphi : \mathbf{I} \to [0, \infty]$ jest przy tym ciągłą, ściśle malejącą funkcją taką, że $\varphi(1) = 0$ oraz φ jest wypukła. Przez $\varphi^{[-1]}$ rozumiemy funkcję:

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t) & 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0 & \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases}$$

Jeżeli $\varphi(0) = \infty$, to $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$. Funkcję φ nazywamy generatorem kopuły.



Wielowymiarowe kopuły

Własności n-kopuły

- będzie podobnie jak wczesniej: $H(u_1, \dots, u_n) = C(F_1(u_1), \dots F_n(u_n))$
- Trochę inna definicja (funkcja n-rosnąca) - nie wchodźmy w szczegóły
- Kopuły archimedesowe: $\varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_n))$. Inne warunki na generator (zamiast wypukły - całkowicie monotoniczny).
- Są jawne wzory na n-kopułe Gaussa, t-studenta - o tym później.

Dlaczego kopuł używa się w finansach?

Własności

- Twierdzenie sklara $\Rightarrow H(x, y) = C(F(x), G(y)) \Rightarrow$ Pozwala nam to na osobne rozpatrywanie dwóch problemów:
  1. Zachowanie się rozkładów brzegowych.
  2. Pokazania jak zmienne zależą od siebie.

  Estymacja - koszyk opcji. (parasole i okulary przeciwsłoneczne)

Dlaczego kopuł używa się w finansach?

Własności

- Monotoniczne przekształcenia $\Rightarrow C_{\alpha(X)\beta(Y)} = C_{XY} \Rightarrow$ wyrażanie pewnych współczynników korelacji jest dużo prostsze w języku kopuł. Np (ρ_S Spearmana i τ Kendalla):

$$\tau = 4 \iint_{I^2} C(v,z)dC(v,z) - 1 \quad \rho_S = 12 \iint_{I^2} C(v,z)dvdz - 3$$

Estymacja - więcej wymiarów ρ-Pearsona się psuje (źle przybliża).

Dlaczego kopuł używa się w finansach?

Własności

- Znamy pewne rodziny kopuł $\Rightarrow$ Tworzenie wielowymiarowych rozkładów innych niż normalne/eliptyczne (kopuły archimedesowe!)
  Kopuły archimedesowe, rozkłady eliptyczne

Wielowymiarowe kopuły

Przejść do pracamag.pdf i tam wszystko pokazać (od n-wymiarowych kopuł)
Pokazać w R algorytm - załadować pakiety fGarch i Copula

Cytaty - Ćopula methods in finance"Umberto Cherubini, Elisa Luciano, Walter Vecchiato

- "(...) we have seen that the three main frontier problems in derivative pricing are the departure from normality, emerging from the smile effect, market incompleteness, corresponding to hedging error, and credit risk, linked to the bivariate relationship in OTC transactions. Copula functions may be of great help to address these problems. As we will see, the main advantage of copula functions is that they enable us to tackle the problem of specifcation of marginal univariate distributions separately from the specifcation of market comovement and dependence."
- "The concept of dependence embedded in copula functions is much more general than the standard linear correlation concept, and it is able to capture non-linear relationships among the markets."

Kopuły, a kryzys

Kryzys

- Nassim Nicholas Taleb, hedge fund manager and author of The Black Swan, is particularly harsh when it comes to the copula. "People got very excited about the Gaussian copula because of its mathematical elegance, but the thing never worked" he says. **"Co-association between securities is not measurable using correlation"** because past history can never prepare you for that one day when everything goes south. Ąnything that relies on correlation is charlatanism.
- In the world of finance, too many quants see only the numbers before them and forget about the concrete reality the figures are supposed to represent. They think they can model just a few years' worth of data and come up with probabilities for things that may happen only once every 10,000 years. Then people invest on the basis of those probabilities, without stopping to wonder whether the numbers make any sense at all.
- As Li himself said of his own model:"Very few people understand the essence of the model", "The most dangerous part is when people believe everything coming out of it."

Bibliografia

Książki

1. *An Introduction to Copulas*. Roger B.Nelsen 2006 Springer Science+Business Media, Inc., ISBN-10: 0-387-28659-4, ISBN-13: 978-0387-28659-4
2. *Copula Methods in Finance*. Umberto Cherubini, Elisa Luciano, Walter Vecchiato 2004 John Wiley & Sons Ltd., ISBN: 0-470-86344-7

Ciekawe artykuły

1. *Copula Functions and their Application in Pricing and Risk Managing Multiname Credit Derivative Products*. Stefano S. Galiani, Department of Mathematics, King's College London, MSc Thesis, 2003
2. *Copulas for Finance. A Reading Guide and Some Applications* E.Bouye, Valdo Durrleman, Ashkan Nikeghbali, Gael Riboulet, Thierry Roncalli. Working paper, 2000.