Wprowadzenie do szeregów czasowych i modelu ARIMA

Marek Śmieja

25.02.2011

Plan

Co to rozumiemy przez szereg czasowy ?

Definicja 1

Szereg czasowy to ciąg danych liczbowych, w którym każda obserwacja związana jest z konkretnym momentem w czasie.

Aby móc używać narzędzi statystycznych konieczne jest zbudowanie matematycznego modelu.

Definicja 2

Szereg czasowy to realizacje pewnego procesu stochastycznego.

Przykłady szeregów czasowych

Występowanie szeregów

- Dane giełdowe
- Dane dotyczące urządzeń fizycznych
- Dane dotyczące pogody
- Dane biologiczne

Rodzaje danych

- Indywidualnie rozpatrywany szereg w oderwaniu od innych danych
- Analiza danych powiązanych ze sobą

Praca z szeregami czasowymi

Cele analizy szeregów czasowych

- Przewidywanie przyszłych wartości
- Badanie dynamiki szeregów

Proces analizy szeregów czasowych

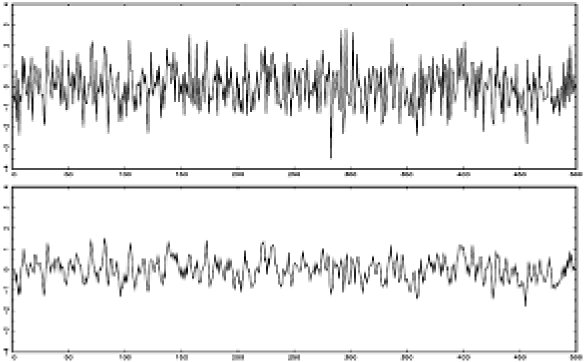
- Analiza wykresu danych
- Zastosowanie wybranych metod statystycznych adekwatnych do wstępnej analizy wykresu

Składowe szeregu

- Trend
- Sezonowość (cykliczność)
- Losowość

Przykłady szeregów czasowych 1

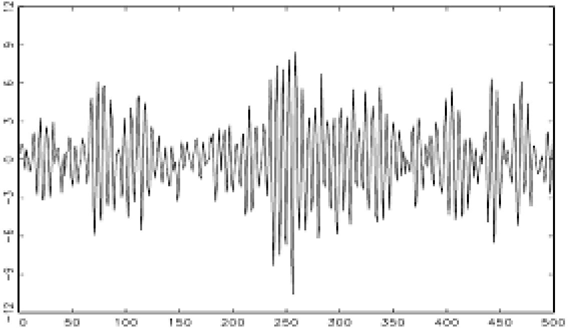
- Biały szum: $w_t \backsim iid(0, \sigma_w^2)$. Często $w_t \backsim Niid(0, \sigma_w^2)$.
- Średnia ruchoma: $v_t = \frac{1}{3}(w_{t-2} + w_{t-1} + w_t)$ (model MA(2)).



Rysunek: Gausowski biały szum i średnia ruchoma tego szumu.

Przykłady szeregów czasowych 2

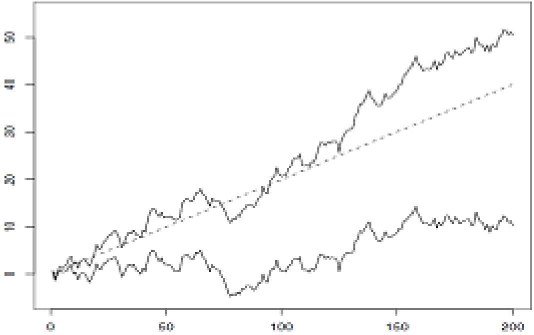
- Autoregresja: $x_t = x_{t-1} + 0,9x_{t-2} + w_t$ dla $|t| = 0, 1, 2, \ldots$ (model AR(2)).



Rysunek: Autoregresja.

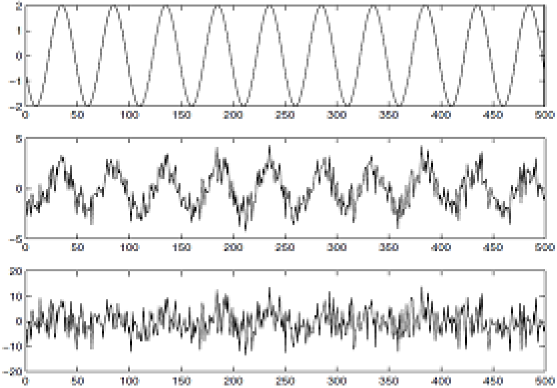
Przykłady szeregów czasowych 3

- Błądzenie losowe z trendem (lub bez):
  $x_t = \delta + x_{t-1} + w_t = \delta t + \sum_{j=1}^{t} w_j$ dla $t = 1, 2, \dots$ oraz $x_0 = 0$
  (model ARIMA(1,1,0)).



Rysunek: Błądzenie losowe z trendem $\delta = 2$ i bez trendu ($\delta = 0$).

- Sygnał w szumie: $x_t = 2\cos(2\pi t/50 + 0,6\pi) + w_t$ dla $t = 1, 2, \ldots$ (szereg cykliczny).



Rysunek: Cosinus, cosinus z szumem $\sigma_w = 1$ i cosinus z szumem $\sigma_w = 5$.

Opis modelu

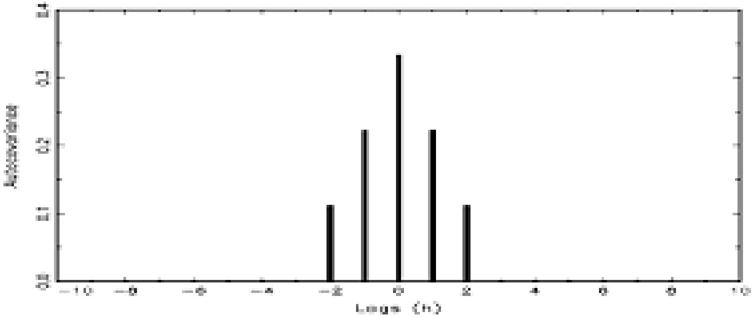
Dla dowolnych momentów czasowych s, t możemy wyznaczyć funkcje:

- średniej: $\mu_t = E(x_t)$
- autokowariancji: $\gamma(s,t) = E[(x_s - \mu_s)(x_t - \mu_t)]$
- autokorelacji: $\rho(s,t) = \frac{\gamma(s,t)}{\sqrt{\gamma(s,s)\gamma(t,t)}}$
- kowariancji dwóch szeregów: $\gamma_{xy}(s,t) = E[(x_s - \mu_{xs})(y_t - \mu_{yt})]$
- korelacji dwóch szeregów: $\rho_{xy}(s,t) = \frac{\gamma_{xy}(s,t)}{\sqrt{\gamma_{xy}(s,s)\gamma_{xy}(t,t)}}$

Zauważmy, że:

- $\gamma(s,t) = \gamma(t,s)$
- $\gamma(t,t) = \sigma_t^2$
- $-1 \leqslant \rho(s,t) \leqslant 1$
- Jeśli $\gamma(s,t) = 0$ i x_s, x_t mają dwuwymiarowy rozkład normalny to są niezależne - dla dowolnych rozkładów niekoniecznie

Autokowariancja - przykład



Rysunek: Autokowariancja średniej ruchomej $x_t = \frac{1}{3}(w_t + w_{t-1} + w_{t-2})$.

Stacjonarność

Problem: Chcemy estymować średnie i kowariancje z danych. Do dyspozycji mamy po jednej realizacji procesu, a nie cały proces, co utrudnia zadanie.

Definicja - ścisła stacjonarność

Szereg czasowy jest ściśle stacjonarny jeśli dla dowolnych dopuszczalnych danych $t_1, \ldots, t_k$ i dowolnego $h \in \mathbb{Z}$ łączny rozkład kolekcji $\{x_{t_1}, \ldots, x_{t_k}\}$ jest identyczny z rozkładem $\{x_{t_1+h}, \ldots, x_{t_k+h}\}$.

Ze ścisłej stacjonarności wynika stałość średnich i wariancji w czasie.

Definicja - słaba stacjonarność (stacjonarność)

Szereg czasowy o skończonej wariancji jest słabo stacjonarny (stacjonarny) jeśli:

1. Średnia μ_t jest stała w czasie.
2. Autokowariancja $\gamma(s, t)$ zależy tylko od różnicy $h = |t - s|$.

Przykłady

- Biały szum:

$$\gamma(s,t) = E[(w_t - 0)(w_s - 0)] = \begin{cases} \sigma_w^2, \; s = t, \\ 0, \; s \neq t. \end{cases}$$

  Jest stacjonarny. Jeśli $w_t \backsim Niid(0, \sigma_w^2)$, to jest nawet ściśle stacjonarny.

- Średnia ruchoma: $v_t = \frac{1}{3}(w_{t-1} + w_t + w_{t+1})$

$$\mu_t = 0$$

$$\gamma(s,t) = \begin{cases} 3/9, \; s = t, \\ 2/9, \; |s-t| = 1, \\ 1/9, \; |s-t| = 2, \\ 0, \; |s-t| \geqslant 3 \end{cases}$$

  Jest stacjonarny.

Przykłady c.d.

- Błądzenie losowe z dryfem: $x_t = \delta t + \sum_{j=1}^{t} w_j$.

$$\mu_t = \delta t.$$

  Zatem błądzenie losowe z dryfem nie jest szeregiem stacjonarnym. Bez dryfu również, ponieważ

$$\gamma(s,t) = \min\{s,t\}\sigma_w^2.$$

- Sygnał w szumie: $x_t = 2\cos(2\pi t/50 + 0,6\pi) + w_t$.

$$\mu_t = 2\cos(2\pi t/50 + 0,6\pi),$$

  Nie jest stacjonarny.

Własności szeregów stacjonarnych

Własności:

- Jeśli szereg jest ściśle stacjonarny, to jest stacjonarny.
- Jeśli szereg jest stacjonarny i każdy wielowymiarowy rozkład $\{x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}\}$ jest gaussowski, to szereg jest ściśle stacjonarny.

Oznaczenia:

- $\mu = \mu_t$
- $\gamma(h) = \gamma(t, t+h)$
- $\rho(h) = \rho(t, t+h)$
- Analogiczne oznaczenia dla kowariancji i korelacji dwóch szeregów.

Własności:

- $\gamma(h) = \gamma(-h)$
- $\gamma(0) = \sigma^2$ - wariancja x_t
- $|\gamma(h)| \leqslant \gamma(0)$

Szereg stacjonarny

Estymacja parametrów szeregu stacjonarnego:

- Średnia: $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_t$.
- Autokowariancja: $\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-h}(x_{t+h} - \hat{\mu})(x_t - \hat{\mu})$.
- Autokorelacja: $\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)}$
- Kowariancja: $\hat{\gamma}_{xy}(h) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-h}(x_{t+h} - \hat{\mu}_x)(y_t - \hat{\mu}_y)$
- Korelacja: $\hat{\rho}_{xy}(h) = \frac{\hat{\gamma}_{xy}(h)}{\sqrt{\hat{\gamma}_x(0)\hat{\gamma}_y(0)}}$

Rodzaje analiz szeregów czasowych

Analiza czasowa

- Korelacja aktualnych danych z danymi poprzednimi
- Modelowanie przyszłych wartości na podstawie aktualnych i przeszłych
- Korzysta z regresji
- Modele ARIMA

Analiza częstościowa

- Wpływ czynników cyklicznych (sezonowych) na wartości szeregu
- Główne narzędzie to analiza spektralna (gęstość spektralna)

Wprowadzenie do modelu ARIMA - pomocnicze operatory

Oznaczenia:

Operator przesunięcia

$$Bx_t = x_{t-1},$$

$$B^k x_t = x_{t-k}.$$

Operator różnicowy

$$\nabla x_t = x_t - x_{t-1},$$

$$\nabla^d x_t = (1-B)^d x_t.$$

Model autoregresyny - AR

Definicja modelu autoregresyjnego stopnia p - AR(p)

Model postaci:

$$x_t = \Phi_1 x_{t-1} + \ldots + \Phi_p x_{t-p} + w_t,$$

gdzie x_t to szereg stacjonarny, Φ_i - stałe ($\Phi_p \neq 0$), w_t to biały szum (gaussowski). Jeśli $\mu = E(x_t) \neq 0$, to powyższy szereg zastępujemy przez:

$$x_t = \alpha + \Phi_1 x_{t-1} + \ldots + \Phi_p x_{t-p} + w_t,$$

gdzie $\alpha = \mu(1 - \Phi_1 - \ldots - \Phi_p)$.

Zapis operatorowy

$$\Phi(B) x_t = w_t,$$

gdzie $\Phi(B) = 1 - \Phi_1 B - \ldots - \Phi_p B^p$.
Wielomianem AR(p) nazywamy wielomian zespolony:

$$\Phi(z) = 1 - \Phi_1 z - \ldots - \Phi_p z^p,\ \Phi_p \neq 0 \text{ oraz } z \in \mathbb{C}.$$

Model AR(1)

Własności procesu $x_t = \Phi x_{t-1} + w_t$ dla $|\Phi| < 1$

- Średnia: $E(x_t) = 0$
- Autokowariancja: $\gamma(h) = \frac{\sigma_w^2 \Phi^h}{1-\Phi^2}$, $h \geqslant 0$
- Autokorelacja: $\rho(h) = \Phi^h$, $h \geqslant 0$
- Własność autokorelacji: $\rho(h) = \Phi\rho(h-1)$
- Zmienna x_t jest skorelowana z wszystkimi poprzednimi zmiennymi x_{t-k}, $k \geqslant 1$.

Proces: $x_t = \Phi x_{t-1} + w_t$

- Jeśli $|\Phi| < 1$, to iterując wstecz otrzymujemy:

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi^j w_{t-j}.$$

  Szereg jest zbieżny (w sensie średniokwadratowym - przestrzeń L^2) i można sprawdzić, że jest stacjonarny. Nazywamy go szeregiem kazualnym.
- Jeśli $|\Phi| = 1$, to dostajemy błądzenie losowe, o którym wiemy już, że nie jest stacjonarny.
- Jeśli $|\Phi| > 1$, to powyższy szereg nie jest zbieżny, ale można iterować go wprzód:

$$x_t = \Phi^{-1} x_{t+1} - \Phi^{-1} w_{t+1} = \dots$$
$$= -\sum_{j=1}^{\infty} \Phi^{-j} w_{t+j}.$$

  Również jest zbieżny, choć ta forma jest bezużyteczna, gdyż teraźniejszość zależy od przyszłości - nazywamy go niekazualnym.

AR(p)

- W ogólności mamy model
$$\Phi(B)x_t = w_t$$
i naszym celem jest znalezienie ciągu x_t.
- Mnożąc obustronnie przez $\Phi^{-1}(B)$ otrzymujemy:
$$x_t = \Phi^{-1}(B)w_t,$$
ale musimy mieć pewność, że Φ jest odwracalne.
- Odwracalność jest zdeterminowana przez odwracalność wielomianu zespolonego AR.
- Dla AR(1) wielomian AR i jego wielomian odwrotny to
$$\Phi(z) = 1 - \Phi_1 z$$
$$\Phi^{-1}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_1^j z^j$$
i odwracalność wielomianu jest równoważna zbieżności szeregu.
- Podobnie jest dla innych modeli AR - wielomianami odwrotnymi są szeregi zespolone.

Własność kazualności

Definicja

Proces AR(p) postaci $\Phi(B)x_t = w_t$ nazywamy kazualnym jeśli daje się zapisać jako:

$$x_t = \Psi(B)w_t,$$

gdzie $\Psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j B^j$ oraz $\sum_{j=0}^{\infty} |\Psi_j| < \infty$.

Twierdzenie

Proces AR(p) jest kazualny jeśli $\Phi(z) \neq 0$ dla $|z| \leqslant 1$.

Przykład - autokorelacja AR(2)

- Dany proces: $x_t = \Phi_1 x_{t-1} + \Phi_2 x_{t-2} + w_t$ - kazualny.
- Bierzemy:
  $E(x_t x_{t-h}) = \Phi_1 E(x_{t-1} x_{t-h}) + \Phi_2 E(x_{t-2} x_{t-h}) + E(w_t x_{t-h})$.
- Ponieważ $E(x_t) = 0$ oraz dla $h > 0$

$$E(w_t x_{t-h}) = E(w_t \sum_{j=0}^{\infty} w_{t-h-j}) = 0,$$

to

$$\gamma(h) = \Phi_1 \gamma(h-1) + \Phi_2 \gamma(h-2).$$

- Dzieląc przez $\rho(0)$ dostajemy

$$\rho(h) - \Phi_1 \rho(h-1) - \Phi_2 \rho(h-2) = 0,$$

z warunkami początkowymi $\rho(0) = 1$ i $\rho(-1) = \rho(1) = \frac{\Phi_1}{1-\Phi_2}$.

C.d. - rozwiązania:

Niech z_1, z_2 będą zerami wielomianu

$$\Phi(z) = 1 - \Phi_1 z + \Phi_2 z^2.$$

Oczywiście $|z_1| > 1$ oraz $|z_2| > 1$ - z kazualności.

1. Jeśli $z_1 \neq z_2$ - rzeczywiste, to
$$\rho(h) = c_1 z_1^{-h} + c_2 z_2^{-h},$$
więc $\rho(h) \to 0$, gdy $h \to \infty$.
2. Jeśli $z_1 = z_2$ - rzeczywiste, to
$$\rho(h) = z_1^{-h}(c_1 + c_2 h),$$
więc $\rho(h) \to 0$, gdy $h \to \infty$.
3. Jeśli $z_1 = \bar{z}_2$, to $c_1 = \bar{c}_2$ (ponieważ $\rho(h)$ - rzeczywiste) oraz
$$\rho(h) = c_1 z_1^{-h} + \bar{c}_1 \bar{z}_1^{-h}$$
Upraszczając dostaniemy, że $\rho(h) \to 0$, gdy $h \to \infty$ sinusoidalnie.

Model MA

Definicja modelu średniej ruchomej stopnia q - MA(q)

Model postaci:

$$x_t = w_t + \Theta_1 w_{t-1} + \ldots + \Theta_q w_{t-q},$$

gdzie w_t -biały szum (gaussowski), Θ_i -stałe ($\Theta_q \neq 0$).

Zapis operatorowy

$$x_t = \Theta(B) w_t,$$

gdzie $\Theta(B) = 1 + \Theta_1 B + \ldots + \Theta_q B^q$.
Wielomianem MA(q) nazywamy wielomian zespolony:

$$\Theta(z) = 1 + \Theta_1 z + \ldots + \Theta_p z^p,\ \Theta_p \neq 0 \text{ oraz } z \in \mathbb{C}.$$

Proces jest stacjonarny dla wszystkich Θ_i.

Model MA(1)

Własności procesu $x_t = w_t + \Theta w_{t-1}$

- Średnia: $E(x_t) = 0$
- Autokowariancja:

$$\gamma(h) = \begin{cases} (1+\Theta^2)\sigma_w^2, \ h = 0, \\ \Theta\sigma_w^2, \ h = 1, \\ 0, \ h > 1 \end{cases}$$

- Autokorelacja:

$$\rho(h) = \begin{cases} \frac{\Theta}{1+\Theta^2}, \ h = 1, \\ 0, \ h > 1 \end{cases}$$

- Zmienna x_t jest skorelowana jedynie ze zmienną w czasie poprzednim x_{t-1}

Niejednoznaczność modelu MA(1)

- Rozważmy model $x_t = w_t + \Theta w_{t-1}$.
- Jeśli zatem założymy, że $\Theta = 5$ oraz $\sigma_w^2 = 1$, to z funkcji autokowariancji widać, że otrzymujemy model o takim samym rozkładzie jak model z parametrami $\Theta = 1/5$ oraz $\sigma_w^2 = 25$.
- Wynika stąd, że ten sam model może być zapisany za pomocą dwóch różnych procesów, dlatego należy stworzyć kryterium dzięki któremu uzyskamy jednoznaczność.

Niejednoznaczność w MA(q)

- Rozważając model $x_t = \Theta(B)w_t$, przedstawmy proces w_t jako kombinację liniową procesu x_t podobnie jak dla procesu AR(p).
- Mnożąc obustronnie przez $\Theta^{-1}(B)$ otrzymujemy:

$$w_t = \Theta^{-1}(B)x_t,$$

  ale Θ musi być odwracalne.
- Ponownie, odwracalność $\Theta(B)$ jest zdeterminowana odwracalnością wielomianu zespolonego $\Theta(z)$.

Własność odwracalności dla procesu MA(p)

Definicja

Proces MA(q) postaci $x_t = \Theta(B)w_t$ jest odwracalny jeśli można go zapisać jako:

$$w_t = \pi(B)x_t,$$

gdzie $\pi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j B^j$ oraz $\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty$.

Twierdzenie

Proces MA(q) jest odwracalny jeśli $\Theta(z) \neq 0$ dla $|z| \leqslant 1$.

Przykład - autokorelacja MA(q)

- Dany jest proces $x_t = \Theta(B)w_t$, gdzie $\Theta(B) = 1 + \Theta_1 B + \ldots \Theta_q B$.
- Po pierwsze $E(x_t) = 0$
- Po drugie

$$\gamma(h) = E[(\sum_{j=0}^{q} \Theta_j w_{t+h-j})(\sum_{k=0}^{q} \Theta_k w_{t-k})]$$

$$= \begin{cases} \sigma_w^2 \sum_{j=0}^{q-h} \Theta_j \Theta_{j+h}, \ 0 \leqslant h \leqslant q, \\ 0, \ h > q \end{cases}$$

- Ostatecznie:

$$\rho(h) = \begin{cases} \frac{\sum_{j=0}^{q-h} \Theta_j \Theta_{j+h}}{1+\Theta_1^2+\ldots+\Theta_q^2}, \ 1 \leqslant h \leqslant q, \\ 0, \ h > q \end{cases}$$

- Czyli x_t jest tylko skorelowane z q poprzedzającymi wyrazami.

Model ARMA

Definicja modelu autoregresyjnego ze średnią ruchomą ARMA(p,q)

Model postaci:

$$x_t = \Phi_1 x_{t-1} + \ldots + \Phi_p x_{t-p} + w_t + \Theta_1 w_{t-1} + \ldots + \Theta_q w_{t-q},$$

gdzie x_t to szereg stacjonarny, $\Phi_p \neq 0$, $\Theta_q \neq 0$, w_t to biały szum (gaussowski). Jeśli $\mu = E(x_t) \neq 0$, to powyższy szereg zastępujemy przez:

$$x_t = \alpha + \Phi_1 x_{t-1} + \ldots + \Phi_p x_{t-p} + w_t + \Theta_1 w_{t-1} + \ldots + \Theta_q w_{t-q},$$

gdzie $\alpha = \mu(1 - \Phi_1 - \ldots - \Phi_p)$.

Zapis operatorowy

$$\Phi(B)x_t = \Theta(B)w_t.$$

Dla procesu ARMA(p,q) przenosimy definicję kazualności oraz odwracalności analogicznie jak dla procesów AR(p) i MA(q). Również w podobny sposób można liczyć korelację w tym modelu.

Redundancja parametrów modelu ARMA

- Procesy:
$$x_t = w_t,$$
$$0,5x_{t-1} = 0,5w_{t-1}$$
opisują ten sam model.
- Odejmujc stronami
$$x_t - 0,5x_{t-1} = w_t - 0,5w_{t-1}$$
nadal dostajemy ten sam model.
- Chcemy potrafić wykryć nadmiarowość parametrów i uprościć model. W tym celu stosujemy zapis operatorowy:
$$(1-0,5B)x_t = (1-0,5B)w_t$$
i dostajemy:
$$x_t = (1-0,5B)^{-1}(1-0,5B)w_t = w_t.$$
- Podobnie możemy rozwiązywać ten problem dla innych procesów ARMA porównując wielomiany AR i MA.

Modele ARMA z trendem

- Model ARMA zakłada stacjonarność procesu x_t
- Jednym z czynników psującym stacjonarność jest trend
- Pewna klasa procesów z trendem może być sprowadzona do modelu ARMA przez usunięcie trndu.

Metody usuwania trendu

- Regresja
- Różnicowanie

Usuwanie trendu za pomocą regresji

Sytuacja

$$x_t = \mu_t + y_t,$$

gdzie $\mu_t = \sum_{j=0}^{k} \beta_j t^j$ - trend wielomianowy, y_t - szereg stacjonarny.

Procedura usuwania trendu:
Estymujemy trend za pomocą regresji wielomianowej - $\hat{\mu}_t$ i tworzymy nowy szereg jako: $\hat{y}_t = x_t - \hat{\mu}_t$.
Dzięki estymacji znamy dokładną postać nowego szeregu $\hat{y}_t$.

Usuwanie trendu za pomocą różnicowania

Sytuacja 1

$$x_t = \mu_t + y_t,$$

$$\mu_t = \beta_0 + \beta_1 t,$$

gdzie y_t - szereg stacjonarny, β_j - stałe. Czyli przyjmujemy trend liniowy(szczególny przypadek poprzedniej sytuacji).

Operacja:

$$\nabla x_t = x_t - x_{t-1} = \beta_1 + \nabla y_t.$$

daje nam szereg stacjonarny.

Sytuacja 2

$$x_t = \mu_t + y_t,$$

$$\mu_t = \delta + \mu_{t-1} + w_t,$$

gdzie w_t - biały szum. Czyli przyjmujemy, że błądzenie losowe jest modelem trendu.

Postępowanie:

$$\begin{aligned} \nabla x_t &= (\mu_t + y_t) - (\mu_{t-1} + y_{t-1}) \\ &= \delta + w_t + \nabla y_t. \end{aligned}$$

- szereg stacjonarny.
Dzięki różnicowaniu, nie musimy nic estymować, ale nie też nie poznajemy wprost szeregu y_t.

Różnicowanie wyżej wymiarowe

Sytuacja 3

$$x_t = \mu_t + y_t,$$
$$\mu_t = \sum_{j=0}^{k} \beta_j t^j,$$

gdzie y_t - stacjonarny, β_j - stałe.

Wówczas $\nabla^k x_t$ - stacjonarny.

Usuwanie niestacjonarności za pomocą różnicowania

Sytuacja 4

$$x_t = \mu_t + y_t,$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + v_t,$$

$$v_t = v_{t-1} + w_t,$$

gdzie w_t - biały szum, y_t - stacjonarny. Niestacjonarność jest modelowana jako podwójne błądzenie losowe.

Tym razem:

$$\nabla^2 x_t = \nabla^2 y_t + w_t$$

- szereg stacjonarny.
Dla k-krotnie złożonych procesów tego typu wykonujemy k-krotne różnicowanie w celu usunięcia niestacjonarności.

Defnicja

Proces x_t nazywamy procesem ARIMA(p,d,q) jeśli

$$\nabla^d x_t = (1 - B)^d x_t$$

jest procesem ARMA(p,q).
Ogólnie ten model zapisujemy jako:

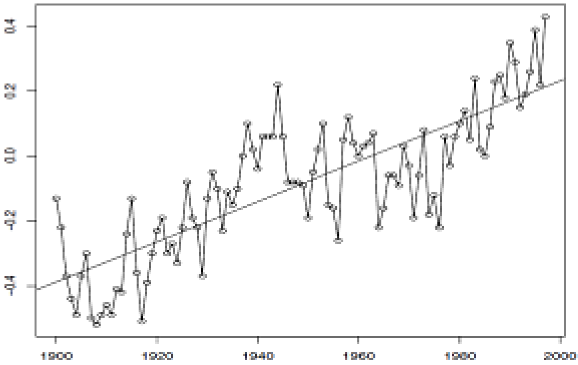
$$\Phi(B)(1 - B)^d x_t = \Theta(B) w_t.$$

Jeśli $E(\nabla^d x_t) = \mu$, to piszemy

$$\Phi(B)(1 - B)^d x_t = \alpha + \Theta(B) w_t,$$

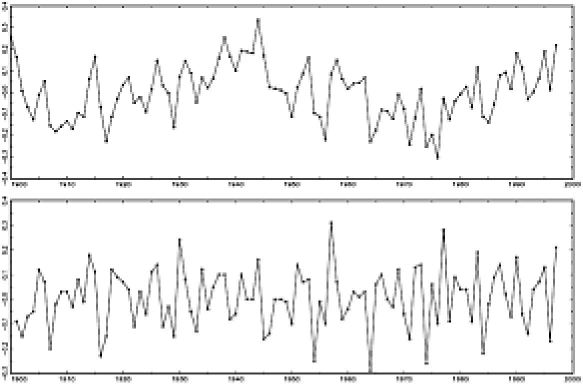
gdzie $\alpha = \mu(1 - \Phi_1 - \ldots \Phi_p)$.

Przykład



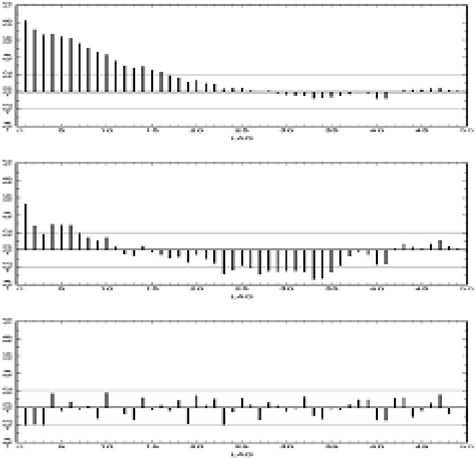
Rysunek: Dane dotyczące temperatury i trend liniowy.

Przykład c.d.



Rysunek: Szereg po usunięciu trendu za pomocą regresji (góra) i różnicowania (dół).

Przykład c.d.



Rysunek: Autokorelacja oryginalnego szeregu(góra) oraz szeregów po usunięciu trendu za pomocą regresji (środek) i różnicowania (dół).