



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Liga Matematyczna IM UJ, grudzień 2009

1. Dla jakich $n > 0$ można znaleźć $n - 1$ prostych przecinających szachownicę $n \times n$ w ten sposób, że przez wnętrze każdego pola szachownicy przechodzi przynajmniej jedna prosta?
2. Niech $f \in \mathcal{C}^2([0, \pi])$ spełnia warunki $f'' \geq -f$ oraz $f(0) = f(\pi)$. Pokaż, że

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi x f(x) dx \geq -f'(\pi).$$

Dla jakich funkcji zachodzi równość?

3. Pokaż, że dla dowolnego wielomianu $P(x)$ o całkowitych współczynnikach istnieją niezerowe wielomiany $Q_2(x)$, $Q_3(x)$, $W_2(x)$ i $W_3(x)$ o współczynnikach całkowitych i takie, że
 - (i) $P(x)Q_2(x) = W_2(x^2)$;
 - (ii) $P(x)Q_3(x) = W_3(x^3)$.
4. Niech G będzie grafem o n wierzchołkach i $m \geq n$ krawędziach. Niech C_k będzie liczbą cykli k -elementowych w tym grafie. Udowodnij, że

$$\sum_{k=3}^{\infty} C_k \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^k \geq 1.$$