



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Liga Matematyczna IM UJ, październik–listopad 2010

1. W trójkącie ABC na boku BC wybieramy dowolny punkt P .
 - (a) [3p] Niech D będzie punktem styczności okręgu wpisanego w ABC z bokiem BC , Q i R środkami okręgów wpisanych w trójkąty ABP i ACP . Pokaż, że trójkąt QDR jest prostokątny.
 - (b) [3p] Niech D' będzie punktem styczności BC i okręgu dopisanego do ABC naprzeciwko wierzchołka A , zaś Q' i R' środkami okręgów dopisanych do trójkątów ABP i ACP naprzeciwko wierzchołka A . Pokaż, że trójkąty QDR i $Q'D'R'$ są podobne.

Uwaga. Okrąg dopisany do trójkąta ABC naprzeciwko A to okrąg styczny do BC i półprostych na przedłużeniu odcinków AB i AC .
2. Dla danej liczby naturalnej n znajdź ciąg liczb naturalnych $a_1 < a_2 < \dots < a_{k_n}$ taki, że $\sum_{i=1}^{k_n} a_i = n$, zaś $\prod_{i=1}^{k_n} a_i$ przyjmuje maksymalną możliwą wartość.
3. Niech k będzie liczbą całkowitą większą od 3, zaś α – liczbą rzeczywistą większą od 2. Pokaż, że każdy zespolony pierwiastek wielomianu $z^k - \alpha z^{k-1} + 1$ spełnia $|z| \leq x_0$, gdzie x_0 jest pierwiastkiem wielomianu leżącym w przedziale $(0, 1)$.