



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Liga Matematyczna IM UJ, grudzień 2010–styczeń 2011

I Liga

1. Niech f będzie rosnącą funkcją nieparzystą. Pokaż, że dla dowolnych a, b, c spełniających $a + b + c = 0$ zachodzi nierówność

$$f(a)f(b) + f(b)f(c) + f(c)f(a) \leq 0.$$

2. Niech $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ oraz $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Znajdź ciągi liczb całkowitych $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ takie, że $A^n = a_n A + b_n I$ oraz uzasadnij, że ten wzór zachodzi. Czy analogiczny fakt jest prawdziwy dla dowolnej macierzy A ?

3. Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich (a, b) spełniających równość

$$a^{b^2} = b^a.$$

Liga Mistrzów

1. Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich (a, b) spełniających równość

$$a^{b^2} = b^a.$$

2. Dla $n \in \mathbb{N}$ znajdź kompletną charakteryzację wszystkich zbiorów $S \subset \mathbb{R}^n$ takich, że dowolne $n + 1$ różnych punktów z S stanowi wierzchołki n -sympleksu o n -objętości 1.
3. Niech A będzie rzeczywistą macierzą symetryczną wymiaru $n \times n$. Niech x będzie ustalonym wektorem jednostkowym, $\rho = \langle x, Ax \rangle$, $\varepsilon = \|(A - \rho I_n)x\|$ (iloczyn skalarny i norma Euklidesowe). Niech (a, b) będzie odcinkiem zawierającym ρ i tylko jedną wartość własną α macierzy A . Udowodnij, że

$$\rho - \frac{\varepsilon^2}{b - \rho} \leq \alpha \leq \rho + \frac{\varepsilon^2}{\rho - a}.$$