



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Liga Matematyczna IM UJ, 14 maja 2011

1. Funkcje ciągłe $f_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, n$) spełniają $\int_0^1 f_i(x) dx = 1$ oraz

$$\int_0^1 \sqrt{\sum_{i=1}^n f_i^2(x)} dx = \sqrt{n}.$$

Pokaż, że $f_i = f_j$ dla każdych i, j .

2. Niech p_i będzie ciągiem wszystkich kolejnych liczb pierwszych oraz $s_n = \sum_{i=1}^n p_i$. Pokaż, że dla dowolnego $i \in \mathbb{N}^+$ w przedziale (s_i, s_{i+1}) można znaleźć kwadrat liczby naturalnej.
3. Niech f będzie wielomianem i założmy, że dla pewnego n istnieją niestałe wielomiany p, q o nieujemnych współczynnikach takie, że $f(x^n) = p(x) \cdot q(x)$. Pokaż, że jeśli f jest stopnia co najmniej 2 to również f jest iloczynem niestałych wielomianów o nieujemnych współczynnikach.
4. Czy każde 2011 kolejnych liczb naturalnych różnych od 0 i 1 zawiera liczbę względnie pierwszą z pozostałymi?
5. W nieskończonym w obie strony ciągu kwadratów rozmieszczamy pewną skończoną liczbę kamieni. Dozwolone są następujące operacje:
- (a) zdejmujemy po jednym kamieniu z pól $n-1$ i n i kładziemy jeden kamień na pole $n+1$;
 - (b) zdejmujemy 2 kamienie z pola n i kładziemy po jednym kamieniu na pola $n+1$ i $n-2$.
- Pokaż, że dla dowolnej początkowej konfiguracji, bez względu na to, jakie będziemy wykonywać operacje, dojdziemy w końcu do układu, który nie dopuszcza już żadnej operacji i układ ten jest jednoznacznie wyznaczony przez początkowy układ kamieni.