



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Liga Matematyczna IM UJ, 14 maja 2011

1. Funkcje ciągłe $f_i: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, n$) spełniają $\int_0^1 f_i(x) dx = 1$ oraz $\int_0^1 \sqrt{\sum_{i=1}^n f_i^2(x)} dx = \sqrt{n}$. Pokaż, że $f_i = f_j$ dla każdych i, j .

- R: Skorzystamy z nierówności $\sum a_i \leq \sqrt{n(\sum a_i^2)}$ prawdziwej dla liczb nieujemnych i będącej równością tylko dla równych a_i .

$$n = \sum_{i=1}^n \int_0^1 f_i(x) dx \leq \int_0^1 \sum_{i=1}^n |f_i(x)| dx \leq \int_0^1 \sqrt{n \sum_{i=1}^n (f_i^2(x))} dx = n.$$

Aby zachodziła równość w miejsce pierwszej nierówności funkcje f_i muszą być nieujemne prawie wszędzie. Podobnie żeby dostać równość w drugiej musimy mieć w prawie każdym punkcie $|f_i(x)| = |f_j(x)|$, a więc ostatecznie $f_i = f_j$ prawie wszędzie i, jako funkcje ciągłe, muszą zgadzać się na całej dziedzinie.

2. Niech p_i będzie ciągiem wszystkich kolejnych liczb pierwszych oraz $s_n = \sum_{i=1}^n p_i$. Pokaż, że dla dowolnego $i \in \mathbb{N}^+$ w przedziale (s_i, s_{i+1}) można znaleźć kwadrat liczby naturalnej.

- R: Widać, że $p_i \geq 2i - 1$. Łatwo stąd pokazać indukcyjnie, że $s_n > n^2$. Załóżmy wbrew tezie, że pomiędzy s_n i s_{n+1} nie ma żadnego kwadratu. Wobec tego jest dla pewnego nieujemnego k :

$$(n+k)^2 \leq s_n < s_{n+1} \leq (n+k+1)^2.$$

Stąd $p_{n+1} = s_{n+1} - s_n \leq (n+k+1)^2 - (n+k)^2 = 2n+2k+1$. Różnica między kolejnymi liczbami pierwszymi jest równa co najmniej 2, więc $p_n \leq 2n+2k-1$ i dalej, ogólnie, $p_{n-m} \leq 2n+2k-1-2m$. Sumując dostaniemy $(n+k)^2 \leq s_n = 2 + \sum_{i=2}^n p_i \leq 2 + (n-1)(2n+2k-1) - 2 \sum_{i=0}^{n-2} i = 2 + (n-1)(2n+2k-1) - (n-1)(n-2) = 2 + (n-1)(n+2k+1) = (n+k)^2 - (k+1)^2 + 2$. Zauważmy, że dla $k > 0$ dostaniemy sprzeczność.

Dla $k = 0$ z kolei nierówność $(n+k)^2 \leq s_n$ jest silna, a więc aby nie było sprzeczności musi być równość w każdej z nierówności $p_{n-m} \leq 2n-1-2m$ a więc ciąg p_n składa się z kolejnych liczb nieparzystych. Ale już $p_5 - p_4 = 4$, co znaczy, że teza może nie zachodzić tylko dla s_i z $i < 5$, co łatwo wykluczyć rachunkiem.

3. Niech f będzie wielomianem i załóżmy, że dla pewnego n istnieją niestałe wielomiany p, q o nieujemnych współczynnikach takie, że $f(x^n) = p(x) \cdot q(x)$. Pokaż, że jeśli f jest stopnia co najmniej 2 to również f jest iloczynem niestałych wielomianów o nieujemnych współczynnikach.

- R: Załóżmy na początek, że $f(0) \neq 0$ i niech p ma niezerowy współczynnik a_k przy x^k . Wtedy współczynnik $f(x^n)$ przy x^k wynosi $a_k q(0) + \dots$, przy czym $q(0) \neq 0$ oraz „...” jest sumą nieujemnych wyrazów, a zatem k jest wielokrotnością n . Stąd p jest wielomianem postaci $p(x) = \bar{p}(x^n)$, podobnie $q(x) = \bar{q}(x^n)$.

Stąd już dostaniemy $f(x) = \bar{p}(x)\bar{q}(x)$.

Niech teraz $f(x) = x^m g(x)$ i $g(0) \neq 0$. Z postulowanego rozkładu wynika, że $f(x^n)$ ma nieujemne współczynniki a więc dostajemy rozkład $f(x) = x^m \cdot g(x)$ jeśli g nie jest stały i $f(x) = x \cdot x^{m-1}$ w przeciwnym przypadku.

4. Czy każde 2011 kolejnych liczb naturalnych różnych od 0 i 1 zawiera liczbę względnie pierwszą z pozostałymi?

R: Nie. Zauważmy, że $p = 251$ i $2p + 1 = 503$ są liczbami pierwszymi. Niech q będzie iloczynem liczb pierwszych mniejszych od 2011 i różnych od p , $2p + 1$. Niech $x > 0$ będzie liczbą spełniającą kongruencje (twierdzenie chińskie o resztach)

$$(1) \quad x \equiv 0 \pmod{q} \quad \text{oraz}$$

$$(2) \quad x \equiv -3p - 1 \pmod{p(2p + 1)}.$$

Weźmy teraz zbiór liczb $S = \{x, x + 1, \dots, x + 2010\}$. Z (1) wynika, że x ma wspólny dzielnik pierwszy z każdą z liczb S poza, być może, $x + 1, x + p, x + 2p + 1$. Ale z (2) wynika, że $x + 1$ i $x + 2p + 1$ mają wspólny dzielnik p oraz $x + p$ i $x + 3p + 1$ podzielne są przez $2p + 1$.

Zatem w S każda liczba ma wspólny dzielnik z pewną inną liczbą S .

5. W nieskończonym w obie strony ciągu kwadratów rozmieszczamy pewną skończoną liczbę kamieni. Dozwolone są następujące operacje:

(a) zdejmujemy po jednym kamieniu z pól $n - 1$ i n i kładziemy jeden kamień na pole $n + 1$;

(b) zdejmujemy 2 kamienie z pola n i kładziemy po jednym kamieniu na pola $n + 1$ i $n - 2$.

Pokaż, że dla dowolnej początkowej konfiguracji, bez względu na to, jakie będziemy wykonywać operacje, dojdziemy w końcu do układu, który nie dopuszcza już żadnej operacji i układ ten jest jednoznacznie wyznaczony przez początkowy układ kamieni.

R: Niech α będzie pierwiastkiem równania $1 + p = p^2$ większym od 1. Przypiszmy kolejnym polom (oraz każdemu kamieniowi stojącemu na takim polu) wartości α^n . Zauważmy, że

(A) $\begin{array}{l} \text{dozwolone operacje nie zmieniają całkowitej sumy} \\ \text{(liczonej z krotnościami) wartości pól z kamieniami.} \end{array}$

Ponadto pierwsza operacja zmniejsza liczbę kamieni na planszy. Zatem po pewnej liczbie kroków dalsze muszą być operacjami drugiego typu. Ale te z kolei zmniejszają łączną sumę indeksów pól (z krotnościami) na których leżą kamienie w każdym kroku o 1. To znaczy, że muszą pojawić się kamienie o dowolnie małych indeksach. Dodatkowo operacje drugiego typu nie zwiększają luk pomiędzy kamieniami, zaś pojawiające się nowe luki mają wielkość co najwyżej 2. To znaczy, że cała konfiguracja kamieni przesuwa się w kierunku ujemnych indeksów, a więc sumaryczna wartość pól na których leżą kamienie maleje do 0, co jest sprzeczne z (A). Zatem dozwolone operacje muszą skończyć się w skończonej liczbie kroków.

Zauważmy, że końcowa konfiguracja nie zawiera 2 kamieni na jednym polu ani na polach sąsiednich. Czyli, przyjmując, że jeśli na polu i leży kamień to, $c_i = 1$ zaś w innym przypadku $c_i = 0$, wartość wszystkich pól z kamieniami jest postaci $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_i \alpha^i$ gdzie $c_i \cdot c_{i-1} = 0$.

Pokażemy w końcu, że nie ma 2 różnych przedstawień tej samej liczby w tej postaci. Załóżmy, że $\sum c_i \alpha^i = \sum d_i \alpha^i$ i k jest największym indeksem takim, że $c_i \neq d_i$, np. $c_k = 1, d_k = 0$. Ale

$$\text{wtedy } 0 = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} c_i \alpha^i - \sum_{i=-\infty}^{+\infty} d_i \alpha^i = \sum_{i=-\infty}^{k-1} d_i \alpha^i - \sum_{i=-\infty}^k c_i \alpha^i < \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha^{k-1-2i} - \alpha^k = \frac{\alpha^{k-1}}{1 - \alpha^{-2}} - \alpha^k = \frac{\alpha^k \alpha}{\alpha^2 - 1} - \alpha^k = 0 \text{ co jest sprzecznością i oznacza, że końcowa konfiguracja jest jednoznaczna.}$$