



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

## **Liga Matematyczna IM UJ**

**22 grudnia 2011 – 6 stycznia 2012**

1. (a) Czy dla dowolnego wielokąta wypukłego istnieje jego krawędź  $K$  i wierzchołek, którego rzut prostopadły na prostą zawierającą  $K$  należy do  $K$ ?  
(b) Czy dla każdego wielościanu wypukłego istnieje jego ściana  $S$  i wierzchołek, którego rzut prostopadły na płaszczyznę zawierającą  $S$  należy do  $S$ ?  
2. Udowodnij, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^{2^n}$$

jest zbieżny na gęstym podzbiorze okręgu jednostkowego.

3. Niech  $A$  i  $B$  będą macierzami  $n \times n$  o współczynnikach rzeczywistych. Udowodnij, że jeżeli  $A^2 + B^2 = AB$  oraz  $AB - BA$  jest odwracalna, to  $n$  jest podzielne przez 3.